

BHS

III

43-1,3

Die

Technische Mechanik

und

Maschinenlehre,

zunächst

als Leitfaden

für

den Unterricht an gewerblichen Lehranstalten,

sowie

auch zum Gebrauche für Techniker jeder Art, ohne Anwendung
der Differential- und Integralrechnung,

bearbeitet von

Dr. Moritz Rühlmann,

Professor der angewandten Mathematik und Maschinenlehre an der königl.
höheren Gewerbschule zu Hannover.

ERSTER BAND.

Technische Mechanik.

Dritte Abtheilung: **Hydrostatik.**

Mit vielen Holzschnitten.

Dresden und Leipzig,

in der Arnoldischen Buchhandlung

1844.



918 u.
a.

B e m e r k u n g .

Die Betheiligung des Verfassers bei den Vorarbeiten zu den hannover'schen Eisenbahnen hat es ihm unmöglich gemacht, das früher gegebene Versprechen der baldigen Lieferung der noch fehlenden Abtheilungen dieses Leitfadens zu halten. Indem derselbe dieß zur Entschuldigung anzuführen für nöthig erachtet, versichert er zugleich sein Bestreben, das Ganze binnen kurzer Zeit zur Vollendung zu bringen.

Hannover, im Juli 1844.

M. Rühlmann.

Bayerische
Staatsbibliothek
München.



082

.181. §

Dritter Abschnitt.

Hydrostatik.

Erstes Kapitel.

Einleitung und Grundgesetz für alle flüssigen Körper.

§. 180.

Vermöge der grossen Verschiedenheit des Aggregatzustandes der in der Natur vorkommenden Körper gehen dieselben, hinsichtlich ihrer Unterscheidung in feste und flüssige Körper, so in einander über, daß eine eigentliche Grenze in physicalischer Hinsicht nicht anzugeben ist. In der Mechanik nimmt man deshalb auch die flüssigen Körper als absolut flüssig, d. h. als solche an, welche die Eigenschaft der leichten Verschiebbarkeit und den hieraus folgenden Mangel einer bestimmten Gestalt im höchsten Grade besitzen, ebenso wie bei den allgemeinen Sätzen der Geostatik und Geodynamik die festen Körper als absolut fest betrachtet wurden.

Anmerkung. Die Mechanik, als reine Wissenschaft betrachtet, gestattet die Annahme absolut flüssiger Körper unbedingt, allein auch wenn solche als Erfahrungswissenschaft dargestellt wird, oder für die technische Mechanik, darf man sie als zulässig ansehen, da die aus solchen Annahmen hergeleiteten Untersuchungen immerhin anwendbare Folgerungen geben, wenn man dabei nur die Erfahrungswelt entsprechend in Betracht zieht.

§. 181.

Die flüssigen Körper lassen sich, wie bereits §. 6. angegeben, in nicht zusammendrückbare und in zusammendrückbare unterscheiden. Zu den ersteren gehören Wasser, Weingeist, Oel, Quecksilber etc., überhaupt alle die, welche nur durch außerordentliche Kräfte, und selbst dann so sehr wenig zusammengedrückt werden können, dass man sie, namentlich bei technischen Untersuchungen, als völlig unzusammendrückbar ansehen darf*); zu den letzteren gehören unsere atmosphärische Luft und die sonstigen gasförmigen Körper, ferner Wasserdampf u. s. w.

Der Kürze wegen, und da überdies die Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung aller flüssigen Körper mit denen des Wassers und der atmosphärischen Luft übereinstimmen (meistentheils ist nur auf den Unterschied der Dichte Rücksicht zu nehmen), wollen wir in dem Folgenden jede nicht zusammendrückbare Flüssigkeit mit dem Namen Wasser, jede zusammendrückbare mit dem Namen Luft bezeichnen, wenn das Gegentheil nicht besonders bemerkt wird.

§. 182.

Wäre uns Gestalt, Gröfse und Verbindungsart der Theile flüssiger Körper bekannt, so ist es wenigstens wahrscheinlich, dass sich die Gesetze des Gleichgewichts derselben aus jenen ableiten lassen würden, welche wir bereits für feste Körper gefunden haben. Da diess jedoch (bis jetzt)

*) Unter dem Drucke von 1,033 Kil. auf 1 Quadrat Centimeter (einer Atmosphäre) wird um Millionentheilen des ursprünglichen Volumens zusammengedrückt

Quecksilber, bei Null - Grad d. hunderttheilig. Thermomet.	um 5,03
Wasser, lufthaltend	49,5
Wasser, luftleer	51,3
Terpentinöl	73,0
Alkohol, bei 11,6 Grad	96,2
Schwefeläther, bei 11 Grad	141—150

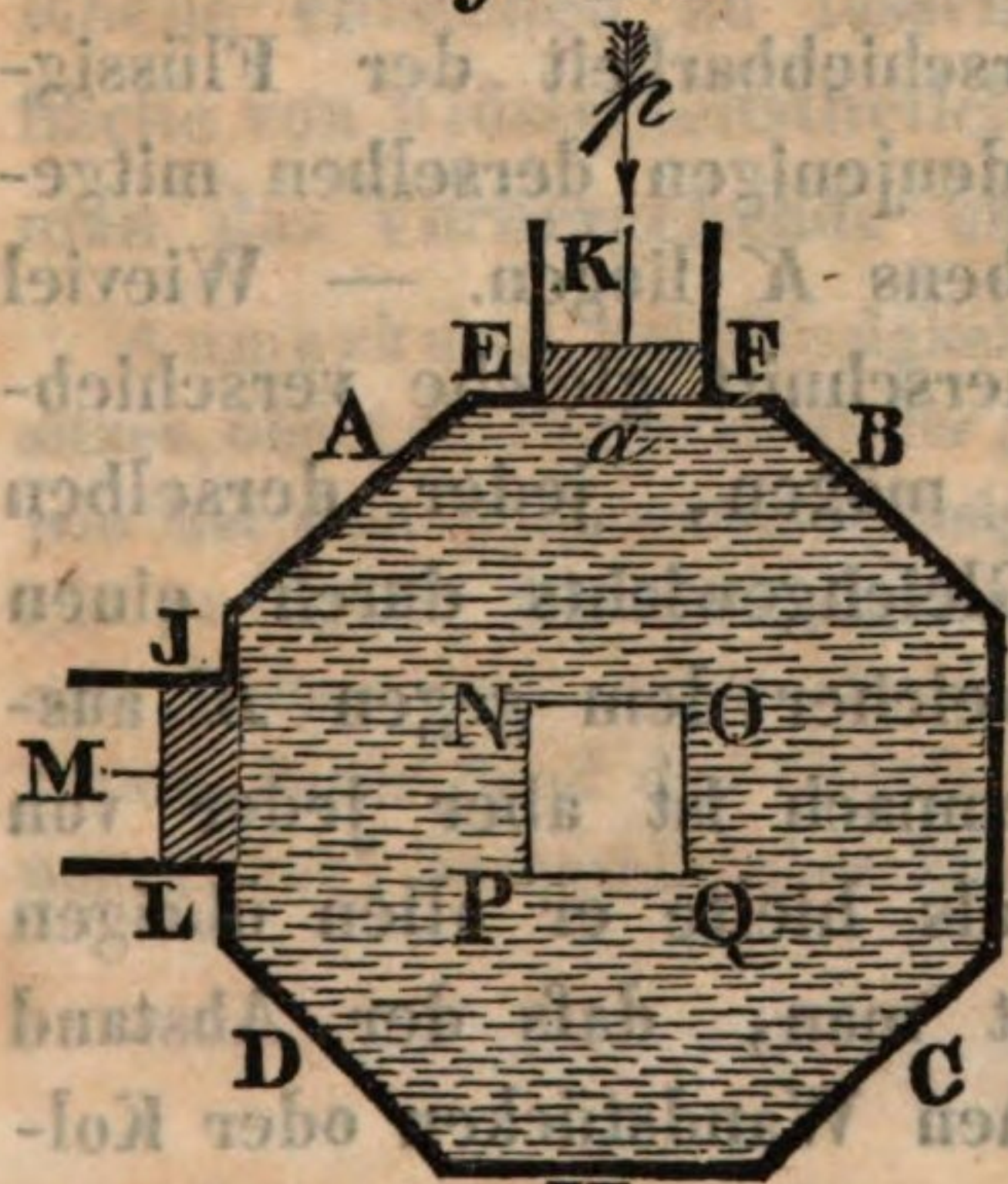
(Baumgartner's Naturlehre.)

nicht der Fall ist, so sind wir genöthigt, eine charakteristische Eigenschaft der flüssigen Körper aufzusuchen und solche als Grundgesetz zur Ableitung der Lehren des Gleichgewichts zu benutzen. Eine solche folgt aber unmittelbar aus der leichten Verschiebbarkeit der Theile eines flüssigen Körpers, und man kann sie auf folgende Weise ausdrücken: „Wird auf einen flüssigen Körper ein Druck ausgeübt, und bleibt ersterer dabei im Gleichgewicht, so pflanzt sich dieser Druck nach allen Richtungen durch die flüssige Masse gleichförmig fort, und jedes Theilchen derselben erfährt einen gleichen Druck.“

Zur Erläuterung dieses Satzes diene Nachstehendes.

Damit vorerst der gemachten Voraussetzung entsprochen werde, daß nämlich der flüssige Körper während des auf ihn einwirkenden Drucks im Gleichgewicht verbleibt, denken wir uns die Flüssigkeit in einem (beliebigen) Gefäße befindlich, wovon *ABCD* Fig. 113. den Vertical-Durchschnitt

Fig. 113. darstellen mag. Die röhrenförmige Mündung *EF* dieses Gefäßes sei durch einen verschiebbaren Kolben *K* gehörig dicht verschlossen, und die Flüssigkeit reiche genau bis unter die Fläche *a* des Kolbens. Ferner denken wir uns dabei die Flüssigkeit als gewichtslos, sehen also von der Wirkung der Schwerkraft, überdißs auch von allen sonst noch möglichen Kräften ab *) und nehmen nur an, daß von Außen gegen den Kolben *K* ein Normaldruck $= p$ ausgeübt wird.



*) Zu den sonstigen Kräften gehört namentlich die, vermöge welcher die Theilchen einer Flüssigkeit unter sich und von festen Körpern (Gefäßswänden) angezogen werden, und die man, je nach den Umständen, unter welchen sie wirkt, mit dem Namen Haar- röhrenkraft oder Adhäsionskraft bezeichnet.

Die in dem Grundsatz ausgesprochene Behauptung läßt sich nun auf den Druck anwenden, welchen jedes Stück der Gefäßwände, ferner jeder in der Flüssigkeit befindliche Körper, sowie jeder Theil der Flüssigkeit selbst erfährt.

Jedes Stück der Gefäßwand, wie G , H etc., wo solches auch liegen mag, dessen Grösse dem Querschnitte des Kolbens K gleichkommt, erfährt nämlich nach Aussen einen dem p gleichen Normaldruck, dem für's Gleichgewicht die Festigkeit des Gefäßes gehörigen Widerstand leisten muss; *) oder wenn eine Stelle der Wandfläche, wie z. B. JL , durch einen ebenfalls verschiebbaren Kolben M verschlossen wäre, so müßte, wenn ebenfalls Gleichgewicht stattfinden soll, gegen M ein von Aussen nach Innen gerichteter Normaldruck angebracht werden, welcher dem auf den Kolben K wirkenden Drucke p völlig gleich kommt. — Der gegen K ausgeübte Normaldruck wirkt nämlich hier nicht bloß auf die in seiner geradlinigen Richtung liegenden Theile, wie solches bei festen Körpern der Fall sein würde, sondern er wird wegen der leichten Verschiebbarkeit der Flüssigkeitselemente auch unverändert denjenigen derselben mitgetheilt, welche seitwärts des Kolbens K liegen. — Wieviel aber auch dem Kolben K an Querschnitt gleiche verschiebbare Kolben M vorhanden sein mögen, jeder derselben müßte für den Zustand des Gleichgewichts durch einen Gegendruck gehalten werden, welcher dem gegen K ausgeübten Drucke gleich ist. Demnach ist aber jeder von diesen Drücken so anzusehen, als hielte er allen übrigen das Gleichgewicht; auch erkennt man, daß der Abstand zwischen den einzelnen beweglichen Wandstücken oder Kolben nicht in Betracht gezogen zu werden braucht, vielmehr

*) Es kann hier lediglich von einem Normaldrucke (rechtwinkeligem Drucke) gegen die Wandstücke die Rede sein, da nur ein solcher durch den Widerstand der Gefäßwände völlig aufgehoben wird; ein bloß theilweises Aufheben müßte Kräfte übrig lassen, die eine neue Wirkung auf die Flüssigkeit und somit Bewegung, nicht aber Gleichgewicht hervorbringen würden.

gleich Null gesetzt werden kann, weshalb überhaupt folgt, daß der gegen einen Kolben K vom Querschnitte $= a$ ausgeübte Druck $= p$ dem auf einen Kolben $= na$ wirkenden Drucke $= np$ das Gleichgewicht hält. Setzt man $na = A$, $np = P$, so ergibt sich die Proportion:

$$p : P = a : A \text{ und hieraus} \\ \text{I. } P = \frac{A}{a} p.$$

Den Normaldruck P kann man den fortgepflanzten Druck nennen, im Gegensatze des unmittelbaren p .

Dasselbe Verhalten wie die Gefäßwände zeigt auch jeder in der Flüssigkeit befindliche Körper, wie $NOPQ$ Fig. 113, wobei für's Gleichgewicht nur wieder voraussetzen sein wird, daß derselbe gehörige Festigkeit besitzt, um nicht von dem auf ihn fortgepflanzten Drucke in einen kleineren Raum zusammengedrängt zu werden. Endlich gilt dasselbe auch für jedes Theilchen der Flüssigkeit selbst, indem man blos die Ausdehnung NO und PQ des vorgedachten Körpers gleich Null zu setzen braucht, um eine Ebene entstehen zu lassen, die man auch als Berührungsfläche von Flüssigkeitstheilchen selbst ansehen, und auf welche man das Vorhergehende unmittelbar anwenden kann.

Anmerkung. Bei Flüssigkeiten, die gewisse Grade von Zähigkeit besitzen, findet die Eigenschaft der gleichförmigen Fortpflanzung des Druckes wie bei dem vollkommen flüssigen Körper statt, nur erfolgt solches mit geringerer Geschwindigkeit. Für den Fall, daß eine Sammlung sehr kleiner und entsprechend gestalteter fester Körper z. B. eine Masse feiner Sand das Gefäß ausfüllte, würden zwar alle Wände einen Druck, immerhin aber keinen gleichen erfahren.

§. 183.

Der Satz von der gleichförmigen Druckfortpflanzung gilt sowohl für Wasser als für Luft. Denn wenn auch letztere durch die einwirkende Druckkraft ein Zusammendrücken erfährt, so kann dieß doch nur so lange dauern, bis die hierdurch erhöhte Spannkraft der Druckkraft gleich geworden ist, oder ihr das Gleichgewicht hält, von welchem letzteren

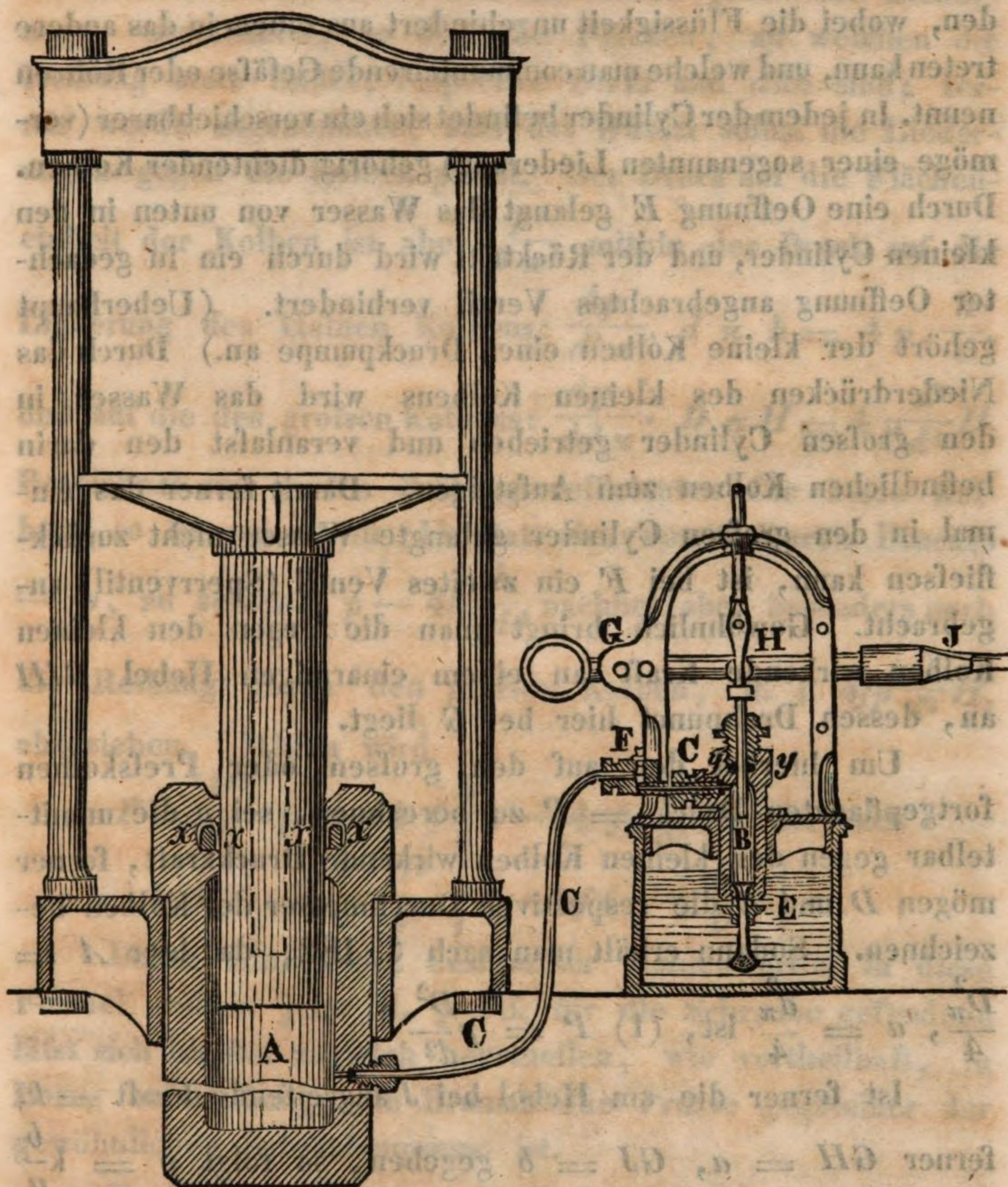
hier aber auch nur die Rede ist. Wichtig ist es jedoch, hierbei zu bemerken, dafs, wenn Luft auf die Wände der Gefäße, in welchen sie eingeschlossen ist, überhaupt nur einen Druck ausüben soll, hierzu keine äufserer auf sie einwirkende Kraft nöthig ist, vielmehr das ihr inwohnende Bestreben genügt, fortwährend einen gröfseren Raum einzunehmen. Uebrigens folgt aus dem Vorhergehenden von selbst, dafs bei der Luft durch Einwirkung eines äufseren Druckes die Dichte, d. i. das Gewicht der Einheit des Volumens, verändert wird, während diese für Wasser (immer wieder bei nicht außerordentlichen Druckkräften) unverändert bleibt.

§. 184.

Nach I. §. 182. kann man eine Kraft beliebig verstärken, d. h. mit einem sehr geringen Drucke einen außerordentlich grofsen erzeugen, wenn man die gegebene Kraft $= p$ gegen einen Kolben vom Querschnitte $= a$ wirken und den erzeugten Druck durch eine Flüssigkeit auf einen zweiten, entsprechend gröfseren Kolben vom Querschnitte $= A$ fortpflanzen läfst. Dafs indess hierdurch an mechanischer Wirkung (§. 135) Nichts gewonnen wird, werden wir nachher besonders zeigen.

Auf diesem Satze beruht namentlich das Princip einer Maschine, die nach ihrem Erfinder Bramah'sche Presse, auch hydrostatische oder hydraulische Presse genannt wird. Das Wesentlichste einer solchen Maschine zeigt Fig. 114. im Verticaldurchschnitte.

Fig. 114.



Im Allgemeinen besteht dieselbe aus zwei cylindrischen, gewöhnlich mit Wasser oder Oel*) gefüllten Gefässen *A* und *B* von ungleichen Durchmessern, deren innere Räume durch

*) Statt nichtzusammendrückbaren Flüssigkeiten könnte man auch Luft anwenden, indess würde dann wegen der am Anfange des vorigen §. bemerkten jedesmaligen Volumenänderung ein gleichsam momentanes Uebertragen der Druckkraft vom kleinen gegen den grossen Kolben nicht statt finden; nicht zu gedenken, dass die Ausführung der Maschine bei Verwendung von Luft, wegen des nothwendigen Dichthaltens aller betreffenden Theile, ausserordentlich schwierig werden müfste. — Ausführlicheres über diese Presse in der Maschinenlehre.

ein Rohr C so mit einander verbunden sind, daß sie Gefäße bilden, wobei die Flüssigkeit ungehindert aus einem in das andere treten kann, und welche man communicirende Gefäße oder Röhren nennt. In jedem der Cylinder befindet sich ein verschiebbarer (vermöge einer sogenannten Liederung) gehörig dichtender Kolben. Durch eine Oeffnung E gelangt das Wasser von unten in den kleinen Cylinder, und der Rücktritt wird durch ein in gedachter Oeffnung angebrachtes Ventil verhindert. (Ueberhaupt gehört der kleine Kolben einer Druckpumpe an.) Durch das Niederdrücken des kleinen Kolbens wird das Wasser in den großen Cylinder getrieben und veranlaßt den darin befindlichen Kolben zum Aufsteigen. Damit ferner das einmal in den großen Cylinder gelangte Wasser nicht zurückfließen kann, ist bei F ein zweites Ventil (Sperrventil) angebracht. Gewöhnlich bringt man die gegen den kleinen Kolben wirkende Kraft an einem einarmigen Hebel GHI an, dessen Drehpunct hier bei G liegt.

Um hierbei den auf den großen oder Presskolben fortgepflanzten Druck $= P$ zu berechnen, sei p die unmittelbar gegen den kleinen Kolben wirkende Druckkraft, ferner mögen D und d die respectiven Durchmesser der Kolben bezeichnen. Sodann erhält man nach §. 182, da hier $A =$

$$\frac{D^2\pi}{4}, a = \frac{d^2\pi}{4} \text{ ist, (1) } P = p \frac{D^2}{d^2}$$

Ist ferner die am Hebel bei J angreifende Kraft $= k$, ferner $GH = a$, $GJ = b$ gegeben, so folgt $p = k \frac{b}{a}$ und nach (1)

$$(2) P = k \frac{b}{a} \frac{D^2}{d^2}.$$

Hierbei ist jedoch von den stattfindenden Reibungen abgesehen. Läßt man den (geringen) Widerstand unbeachtet, welcher durch das Anhängen etc. des Wassers an den Gefäßswänden auch sonst noch entsteht, so ist es namentlich die an den Liederungen x und y der beiden Kolben entstehende Reibung, welche in Betracht gezogen werden muß. Die Größe derselben läßt sich folgendermaßen er-

mitteln. Es mögen H und h die Höhen jeder der Liederungen bezeichnen, so daß die Flächen, an welchen die Reibung statt findet, respective $D\pi H$ und $d\pi h$ sind; ferner werde angenommen, daß das Wasser selbst die Liederungen gegen die Kolben preßt. Der Druck auf die Flächeneinheit der Kolben ist aber $\frac{4p}{d^2\pi}$, mithin der Druck auf die

Liederung des kleinen Kolbens: $\frac{4p}{d^2\pi} \cdot d\pi h = 4p \cdot \frac{h}{d}$,

und auf die des großen Kolbens: $\frac{4p}{d^2\pi} \cdot D\pi H = 4p \frac{D}{d^2} H$.

Bezeichnet nun f den Reibungscoefficienten für beide Kolben, so ist vorerst in (1) statt des unmittelbaren Druckes $= p$, zu setzen: $p - 4fp \frac{h}{d}$, nachher aber besonders noch die Reibung gegen den großen Kolben, d. i. $4fp \frac{D}{d^2} H$, abzuziehen. Mithin wird

$$P = \frac{D^2}{d^2} p (1 - 4f \frac{h}{d}) - 4fp \frac{D}{d^2} H, \text{ oder auch}$$

$$\text{I. } P = k \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{D^2}{d^2} \left\{ 1 - 4f \left(\frac{h}{d} + \frac{H}{D} \right) \right\}.$$

Durch Einführung bestimmter Zahlenwerthe in diese Formel und in jene III. §. 76. für die Schraube gefundene läßt sich hierbei zugleich beurtheilen, wie vortheilhaft, in Bezug auf Reibung, die Bramah'sche Presse gegenüber der gewöhnlichen Schraubenpresse ist.

Es bleibt nunmehr noch übrig, zu zeigen, wie sowohl bei der Bramah'schen Presse als bei allen Maschinen, deren Princip auf dem Satze der gleichförmigen Druckfortpflanzung in Flüssigkeiten beruht, ein Gewinn an mechanischer Wirkung nicht statt findet. *) Bezeichnet man die gleichzeitigen Wege des kleinen und großen Kolbens respective mit s und S , und wird beachtet, daß der Raum, aus welchem der kleinere Kolben das Wasser verdrängt, ebenso groß sein muß, als der,

*) Was sich überhaupt auch für die früher statisch betrachteten und alle andere Maschinen nachweisen läßt.

aus welchem letzteres den grossen Kolben treibt, so folgt

$$d^2s = D^2S \text{ und } \frac{D^2}{d^2} = \frac{s}{S};$$

mithin, wenn man diese Gleichung mit der (1) verbindet

$$P = p \cdot \frac{s}{S} \text{ und } PS = ps,$$

was zu beweisen war.

Z w e i t e s K a p i t e l.

Gleichgewicht und Druck des Wassers in Gefässen, wenn auf solches blos die Schwerkraft als wirksam gedacht wird.

§. 185.

In dem gegenwärtigen Kapitel ermitteln wir die Gleichgewichtsgesetze des in Gefässen eingeschlossenen Wassers, wenn auf solches keine andere als die Schwerkraft wirkt, sehen also von allen sonst möglichen äusseren oder inneren Kräften, wie z. B. Atmosphärendruck, Adhäsions- und Haar- röhrenkraft u. s. w., durchaus ab. Ferner nehmen wir an, dass die Richtungen, nach welchen die Schwerkraft auf die verschiedenen Punkte des flüssigen Körpers wirkt, unter einander parallel sind (§. 24), wenn das Gegentheil nicht besonders bemerkt wird.

§. 186.

Aus der Wirkung der Schwerkraft auf das in einem oben offenen Gefässe *ABCD*. Fig. 115. enthaltene Wasser entsteht ein abwärts gerichteter Druck, welcher sich zwar nach allen Seiten hin fortpflanzt, dessen Grösse sich jedoch nach anderen Gesetzen richtet, als die im vorigen Kapitel

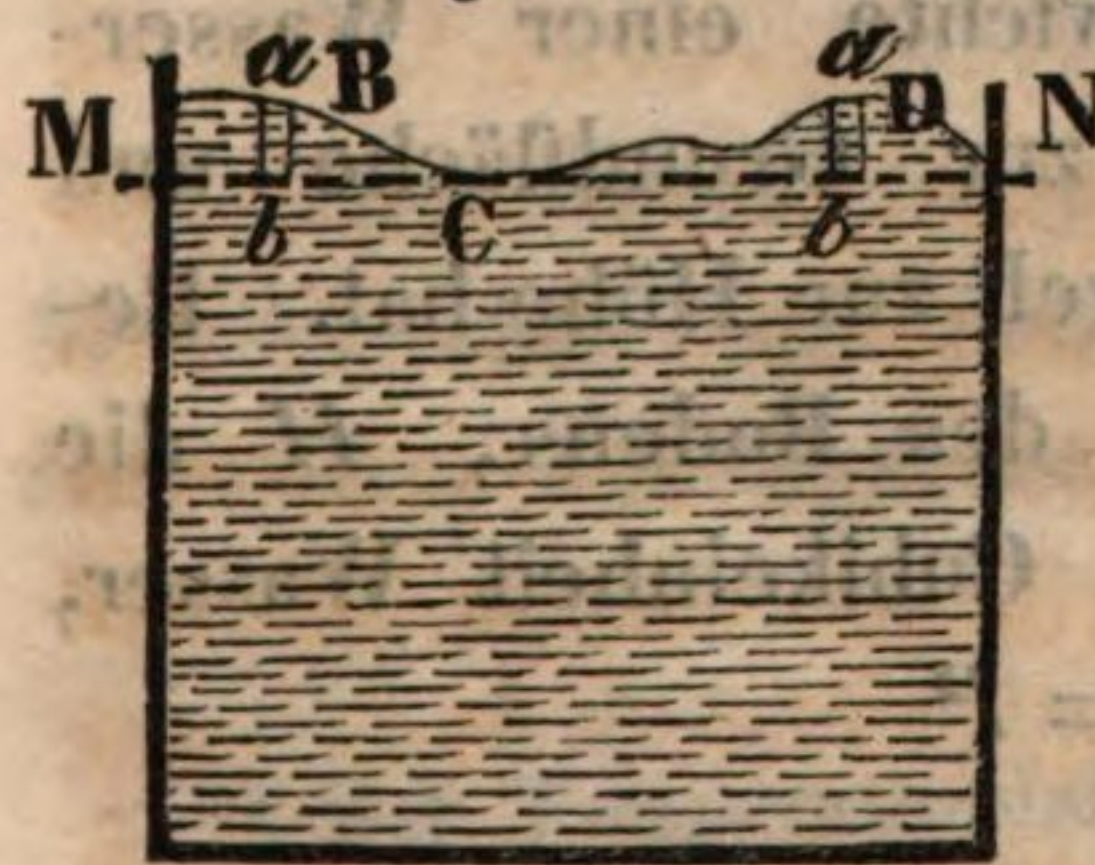
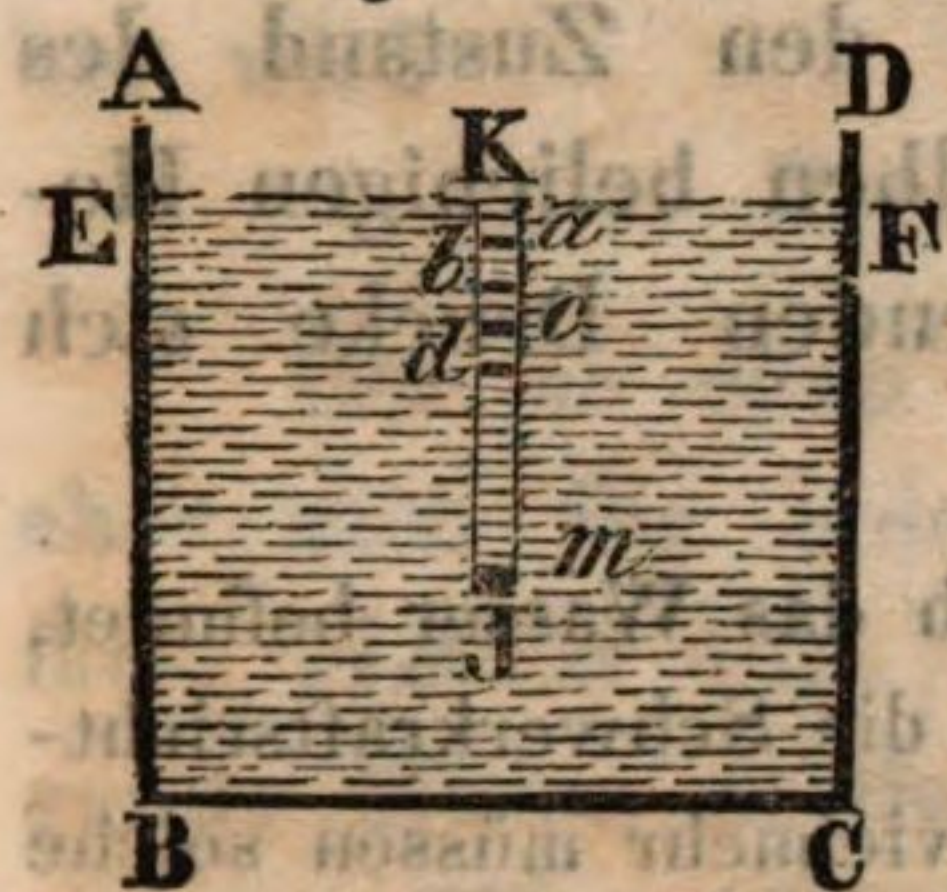
betrachteten Drücke, die durch äussere auf die Oberfläche des Wassers wirkende Kräfte erzeugt wurden. Um ein Mafs für einen solchen Druck zu erhalten, betrachten wir ein in der flüssigen Masse befindliches Theilchen oder

Fig. 115. Element m und denken uns über demselben eine bis zur Oberfläche oder dem Wasserspiegel EF reichende Flüssigkeitssäule (Wasserfaden) KI gleichsam als abgegrenzt. Das an der Oberfläche befindliche Element a wird nun durch sein Gewicht auf das zunächst unter ihm liegende Element b , so wie mittelbar auf alle folgende drücken; für den Druck auf das unter b liegende Element c vereinigt sich mit dem fortgepflanzten Drucke von a das Gewicht des Elementes b , u. s. f. für alle abwärts nach m hin liegende Elemente, so dafs der Druck, welchen m erfährt, durch das Gewicht der Flüssigkeitssäule KI gemessen wird.

Der Druck, welchen irgend ein Flüssigkeitselement erfährt, ist sonach um so gröfser, je tiefer dasselbe unter dem Wasserspiegel EF liegt, und in einer von letzterem überall gleichweit abstehenden Fläche der flüssigen Masse müssen gleiche Drücke stattfinden.

Hiernach läfst sich nun zeigen, dafs für den Zustand des Gleichgewichtes der Wasserspiegel EF eine horizontale Ebene bilden mufs. Angenommen, es wäre letzteres nicht der Fall, vielmehr habe die Oberfläche eine aus der Durchschnitsfigur 116 sich ergebende Gestalt, wobei einzelne Theile der Flüssigkeit höher als andere liegen. Durch

Fig. 116. den tiefsten Punct C denke man sich eine horizontale Ebene MN geführt, und die darüber bei B und D befindlichen Flüssigkeitsmassen in Wassersäulen ab u. s. w. zerlegt. Jede solcher Wassersäulen übt nun einen nach allen Seiten hin gerichteten Druck aus, der nothwendig eine Bewegung veranlassen mufs, wenn die übrigen Flüssigkeitsele-



mente nicht einen gleichen Gegendruck leisten. So lange aber über MN nicht Flüssigkeitssäulen von gleicher Höhe stehen, oder die Oberfläche nicht zu MN parallel, d. i. horizontal ist, kann jener gleiche Gegendruck nicht stattfinden, folglich auch kein Gleichgewicht vorhanden sein.

Hieraus folgt zugleich, dafs, für den Zustand des Gleichgewichtes, die in einer und derselben beliebigen Horizontalschicht der Flüssigkeit stattfindenden Drücke sich gegen einander aufheben müssen.

Anmerkung. Hat das Gefäfs, worin sich das Wasser befindet, eine sehr bedeutende Ausdehnung, so kann man die Schwerkraftsrichtungen nicht unter einander parallel annehmen, vielmehr müssen solche in einem Punkte zusammenlaufen, und die Oberfläche des Wassers mufs einen Kugelflächentheil bilden, deren Mittelpunkt mit dem der Erde zusammenfällt.

§. 187.

Bodendruck.

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich, dafs Wasser, welches sich in einem prismatischen Gefäfs mit verticaler Axe und horizontalem Boden befindet, gegen letzteren im Zustande des Gleichgewichtes einen Druck ausübt, welcher dem Gewichte des Wassers gleich ist. Denn wenn auch, der gleichförmigen Druckfortpflanzung wegen, gleichzeitig ein Druck auf die Seitenwände des Gefäßes ausgeübt werden mufs, so ist dieser doch gleichsam als eine Art von Spannung anzusehen, wodurch keine Verminderung des Druckes in verticaler Richtung veranlafst wird. Der Druck auf den horizontalen Boden eines geraden prismatischen Gefäßes ist folglich dem Gewichte einer Wassersäule gleich, welche diesen Boden zur Grundfläche und dessen Verticalabstand vom Wasserspiegel zur Höhe hat. Bezeichnet daher A den Flächeninhalt des Bodens, H die Wasserhöhe und γ das Gewicht der Cubikeinheit Wasser, so erhält man für den Bodendruck $= P$

$$P = \gamma \cdot A \cdot H.$$

Hierbei ist natürlich vorausgesetzt, dafs sich H und

A auf dasselbe Längen- und Flächenmafs beziehen, wie das Cubikmafs für γ . Drückt man daher erstere beiden Gröfsen respective in Metern und Quadratmetern aus, so bezeichnet γ das Gewicht eines Cubikmeters Wasser, welches zufolge §. 24 gleich 1000 Kilogrammen ist*). Daher wird

$$P = 1000. A.H. \text{ Kilogramme.}$$

Der so eben gefundene Satz für den Bodendruck gilt aber auch für jedes beliebige, wie immer gestaltete Gefäfs, $ABCD$ Fig. 117 oder Fig. 118, was sich auf folgende Weise darthun läfst. Es sei $EF = H$ die senk-

rechte Wasserhöhe, der Inhalt des Horizontalbodens $BC = A$. Man denke sich nun EF in sehr kleine Theile Eb , be , eh etc. getheilt, und durch jeden der Theilpunkte eine horizontale Ebene, wie ac , df , gi etc. gelegt, so dafs man die dadurch gebildeten

Körperelemente ohne besonderen Fehler als Prismen ansehen darf. Die Inhalte der respectiven Grundflächen mögen mit a_1 , a_2 , $a_3 \dots$ bezeichnet werden.

Nach dem Vorstehenden wird sodann der Druck $= p_1$, welchen die Fläche a_1 erfährt, ausgedrückt durch

$$(1) \quad p_1 = \gamma \cdot a_1 E b.$$

Der Druck $= p_2$, welchen die Fläche a_2 erleidet, besteht aber aus dem Gewichte der unmittelbar über ihr stehenden Flüssigkeitssäule $aGHc$ und aus dem fortgepflanz-

*) Der Temperatureinflufs auf das Gewicht der Cubikeinheit Wasser kann bei gegenwärtigen Betrachtungen aufser Acht bleiben. Später wird dieser Gegenstand besonders abgehandelt.

ten Drucke von p_1 , so dafs, wenn letzterer vorerst mit x bezeichnet wird, folgt

$$(2) \quad p_2 = \gamma \cdot a_2 \cdot be + x.$$

Nach I. §. 182 verhält sich aber $p_1 : x = a_1 : a_2$, woraus sich $x = p_1 \cdot \frac{a_2}{a_1}$ und somit ergibt

$p_2 = \gamma \cdot a_2 \cdot be + p_1 \frac{a_2}{a_1}$; oder, wenn man für p_1 den Werth aus (1) substituirt,

$$p_2 = \gamma \cdot a_2 \cdot be + \gamma \cdot a_2 \cdot Eb = \gamma \cdot a_2 (be + Eb); \text{ d. i. } (3) \quad p_2 = \gamma \cdot a_2 \cdot Ee.$$

Ebenso erhält man für den Druck $= p_3$ auf die Fläche a_3 , wenn der von p_2 fortgepflanzte Druck mit y bezeichnet wird,

$$(4) \quad p_3 = \gamma \cdot a_3 \cdot eh + y.$$

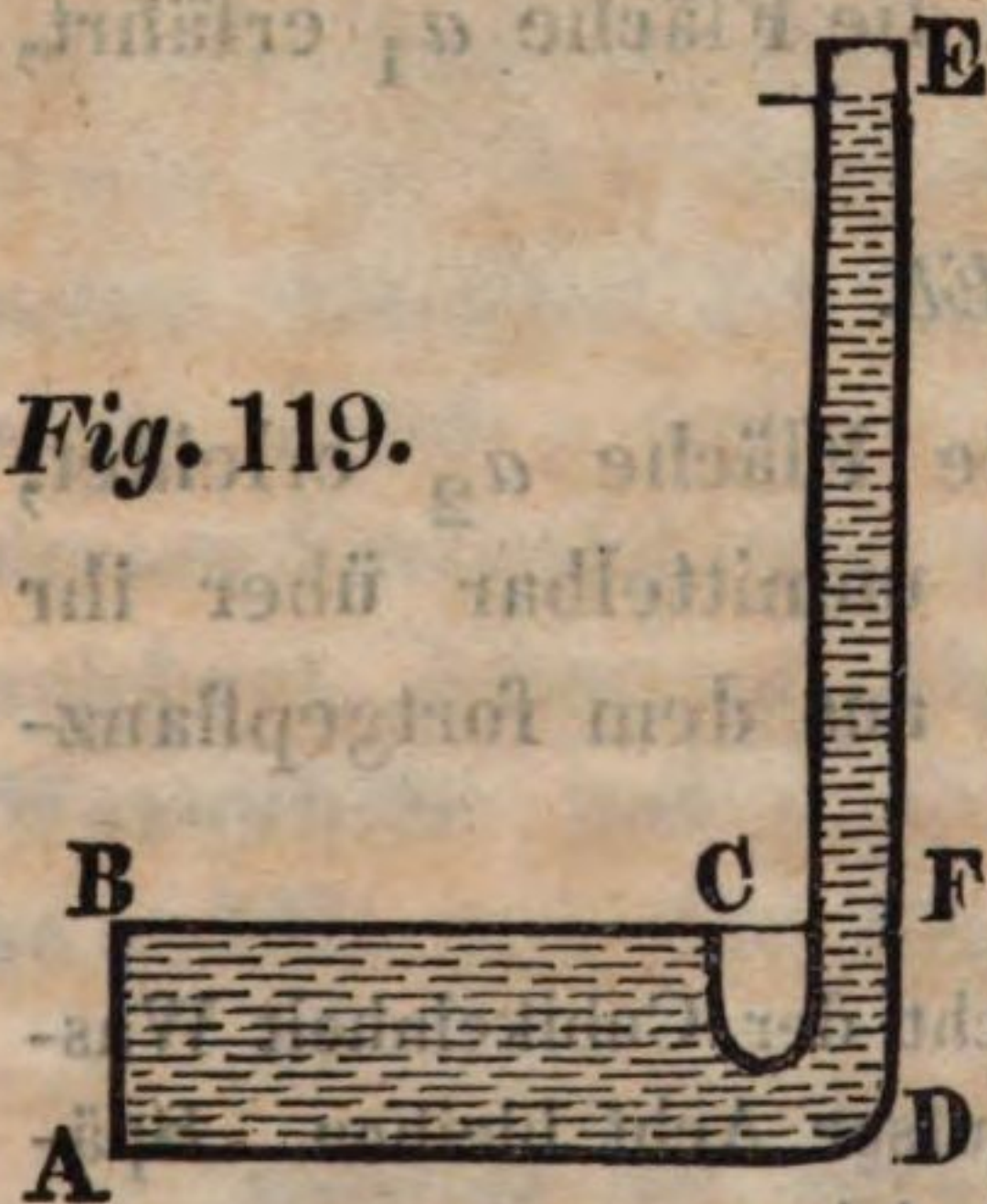
Es ist aber $y = p_2 \frac{a_3}{a_2}$, oder mit Bezug auf (3)

$y = \gamma \cdot a_3 \cdot Ee$, somit aber aus (4)

$$p_3 = \gamma a_3 (eh + Ee) = \gamma a_3 Eh.$$

Auf solche Weise fortgefahren, läßt sich allgemein zeigen, dafs der Druck, welchen eine beliebige Horizontalebene MN erfährt, dem Gewichte einer Wassersäule gleich ist, welche die gedrückte Fläche zur Basis und den Verticalabstand derselben vom Wasserspiegel zur Höhe hat, so dafs man für den Druck $= p_n = P$ auf den Boden wie vorher erhält $P = \gamma \cdot A \cdot H$.

Fig. 119.



Auf gleich einfache Weise läßt sich zeigen, dafs vorstehendes Gesetz auch auf jeden horizontalen Theil der Seitenwände eines Gefäßes anwendbar ist. So ist z. B. der vertical aufwärts gerichtete Druck, welchen die Decke BC des bis zum Punkte E mit Wasser gefüllten Gefäßes $ABCD$ Fig. 119 erfährt, dem Gewichte einer Wassersäule gleich, welche BC zur Basis und den Verticalabstand EF zur Höhe hat.

Auf dem Satze vom Drucke gegen horizontale Boden oder eben solche Wandstücke, Decken etc. beruht das Princip des anatomischen Hebers, der Real'schen Presse, der Wassersäulenmaschine etc., von welcher letzteren in der Maschinenlehre gehandelt werden wird.

Anmerkung. Nach diesen allgemeinen Sätzen könnte es auffallend erscheinen, daß der Bodendruck bald kleiner, wie in Fig. 117, bald größer, wie in Fig. 118 und 119, als das Gewicht der im Gefäße überhaupt enthaltenen Flüssigkeit ist; eine einfache Betrachtung der Sache giebt indeß hierüber vollkommen Aufschluß. Bei Fig. 117 ist es offenbar, daß die in den Räumen *ABG* und *HCD* enthaltene Wassermasse zum Bodendruck Nichts beiträgt, solche vielmehr von den schiefen Seitenwänden getragen wird. Bei Fig. 118 dagegen, wo die Bodentheile *BK* und *CL* zwar keine bis zur Oberfläche *AD* reichende Wassermasse unmittelbar über sich haben, pflanzt sich dennoch der Druck der Wassersäule *AKLD* zu den gedachten Theilen auf die Weise fort, daß solche einen ihrer Größe verhältnißmäßig gleichen Druck wie *KL*, alle Punkte des Bodens *BC* folglich einen und denselben Druck erfahren. Bei Fig. 119 wirkt das Gewicht der Wassersäule *EF* gegen *BC*, eben so wie Fig. 113 die auf einen Kolben von Außen her thätige Druckkraft etc. Fernere Erläuterungen hierüber werden sich nach der Betrachtung des Druckes gegen die Seitenwände der Gefäße herausstellen.

§. 188.

Für das Gleichgewicht ungleichartiger Flüssigkeiten, namentlich solcher von verschiedener Dichte, die mit einander keine chemische Verbindung eingehen, läßt sich mit Hilfe des Vorhergegangenen zunächst leicht nachweisen, daß sich diese im Verhältniß ihrer Dichten über einander lagern müssen, und jede Schicht von gleicher Dichte zwischen parallel-horizontalen Ebenen enthalten sein wird. Was ferner in solchen Fällen den Druck gegen horizontale Gefäßboden oder Wände anlangt, so bedarf es jetzt ebenfalls keines besonderen Beweises, daß ein solcher gleich dem Flächeninhalte des Bodens, multiplicirt mit der Summe der Producte aus den verschiedenen Flüssigkeitshöhen und ihren respectiven Dichten, ist. Sind daher die Höhen der einzelnen Schichten $h_1, h_2, h_3 \dots$, ihre Dichten $p_1, p_2,$

$p_3, \dots$, und ist der Bodeninhalt $= A$, so erhält man für den Druck $= P$ auf den horizontalen Boden

$$P = A(p_1 h_1 + p_2 h_2 + p_3 h_3 \dots).$$

§. 189.

Druck auf die Seitenwände der Gefäße.

Vorerst werde bemerkt, daß es in der Hydrostatik gebräuchlich ist, jeden nicht horizontalen Boden oder jedes solches Stück desselben als Theil der Seitenwand des betreffenden Gefäßes zu betrachten.

In jedem mit Wasser gefüllten, beliebig gestalteten Gefäße erleidet aber ein nach allen Richtungen hin unendlich kleines Stück (Elementarfläche) einer solchen Seitenwand einen Normaldruck, welcher dem Gewichte einer Wassersäule gleich ist, die das gedachte Wandstück zur Basis und dessen Verticalabstand vom Wasserspiegel zur Höhe hat. Denn da der Druck, den irgend ein Wassertheilchen im Gefäße erfährt, sich eben so gut nach den Seiten, als nach unten fortpflanzt, so ist klar, daß ein Stück der Seitenwand, wie das vorbezeichnete, denselben Druck wie ein eben so großes Stück des Bodens erleiden würde, wenn man für beide einerlei Abstand vom Wasserspiegel voraussetzte.

Bildet das gedachte Wandstück eine krumme Fläche, so ist die Richtung dieses Druckes als rechtwinkelig auf der Tangentialebene desselben anzunehmen.

§. 190.

Für den Normaldruck, den eine ebene, senkrechte oder beliebig geneigte Seitenwand von willkürlicher Ausdehnung erfährt, läßt sich jetzt sehr leicht eine allgemeine Regel finden.

Man theile die ganze Wand in Elementarflächen, setze deren Inhalte $a_1, a_2, a_3, \dots$ und ihre respectiven Abstände vom Wasserspiegel $h_1, h_2, h_3, \dots$. Die Drücke auf diese Elemente sind daher nach vorigem §. $\gamma a_1 h_1, \gamma a_2 h_2, \gamma a_3 h_3, \dots$. Die Richtung jedes die-

ser Drücke steht aber auf der betreffenden ebenen Wand normal, so daß der Gesamtdruck gegen dieselbe aus einem Systeme paralleler Kräfte besteht, deren Mittelkraft $= R$ ihrer algebraischen Summe gleich ist, also

$$R = \gamma (a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3 \dots).$$

Es läßt sich aber die Summe der in der Parenthese befindlichen Größen näher bestimmen. Legt man nämlich den Elementarflächen $a_1, a_2, a_3 \dots$ Gewichte bei, wovon gleiche Theile gleichviel wiegen, so wirken diese in unter einander parallelen, gegen den Wasserspiegel rechtwinkligen Richtungen, und es kann die gedachte Summe nach §. 27 keine andere als die der statischen Momente der Theile $a_1, a_2, a_3 \dots$ sein, wenn man den Wasserspiegel zur Momentenebene annimmt. Bezeichnet man daher die Entfernung des Schwerpunktes der ebenen Wand vom Wasserspiegel mit z und den Inhalt der ganzen gedrückten Fläche mit A , d. h. setzt $A = a_1 + a_2 + a_3 \dots$, so folgt

$$\gamma Az = p (a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3 \dots);$$

mithin das (1)

$$R = \gamma Az.$$

Der Normaldruck gegen eine beliebige ebene Seitenwand eines Gefäßes ist daher dem Gewichte einer Wassersäule gleich, welche die gedrückte Ebene zur Basis und den Abstand des Schwerpunktes derselben vom Wasserspiegel zur Höhe hat.

Die Schwerpunktsentfernung einer solchen Ebene vom Wasserspiegel nennt man gewöhnlich die Druckhöhe dieser Ebene.

Aus dem Vorstehenden läßt sich zugleich abnehmen, daß der Normaldruck auf eine in der Flüssigkeit untergetauchte Ebene derselbe bleibt, wenn man auch letztere beliebig um ihren Schwerpunkt dreht.

§. 191.

Der Satz des vorigen §. kann auch benutzt werden,

um den Druck auf die gesammte Seitenfläche eines Gefäßes, d. h., auf alle Dreiecke, Parallelogramme u. s. w., woraus dieselbe besteht, zu berechnen. Sieht man die Gröfse der Wandstücken wieder als Gewichte an, die in parallelen, gegen den Wasserspiegel rechtwinkeligen Richtungen wirken müssen, so läßt sich, ähnlich wie vorher, zeigen, daß der Druck, den sämtliche Seitenwände erfahren, dem Gewichte eines Wasserkörpers gleich ist, welcher aus der Summe der Inhalte dieser Flächen multiplicirt mit dem Abstände des Schwerpunctes des ganzen Systemes vom Wasserspiegel besteht. Zu beachten ist jedoch hierbei, daß hier der Gesamtdruck nicht, wie im vorigen §., als Mittelkraft, sondern als der Inbegriff der Normaldrücke zu betrachten ist, welche jede der Flächen für sich allein erfährt. In diesem Sinne läßt sich bemerkte Regel auch auf den Gesamtdruck anwenden, den irgend eine krumme Seitenfläche erleidet, d. h., man muß diesen Druck als den Inbegriff der Normaldrücke ansehen, wovon jeder senkrecht auf der Ebene steht, welche als Berührende für jede der Elementarflächen gedacht werden kann.

Anmerkung. Die Frage, in wiefern sich zu diesen einzelnen Normaldrücken eine Mittelkraft angeben läßt, ob eine einzige solche in allen Fällen ausreicht, und wo der Angriffspunct liegt, bleibt später folgenden Betrachtungen überlassen.

§. 192.

Zur Erläuterung und Anwendung der Sätze vorstehender Paragraphen mögen hier einige Aufgaben folgen.

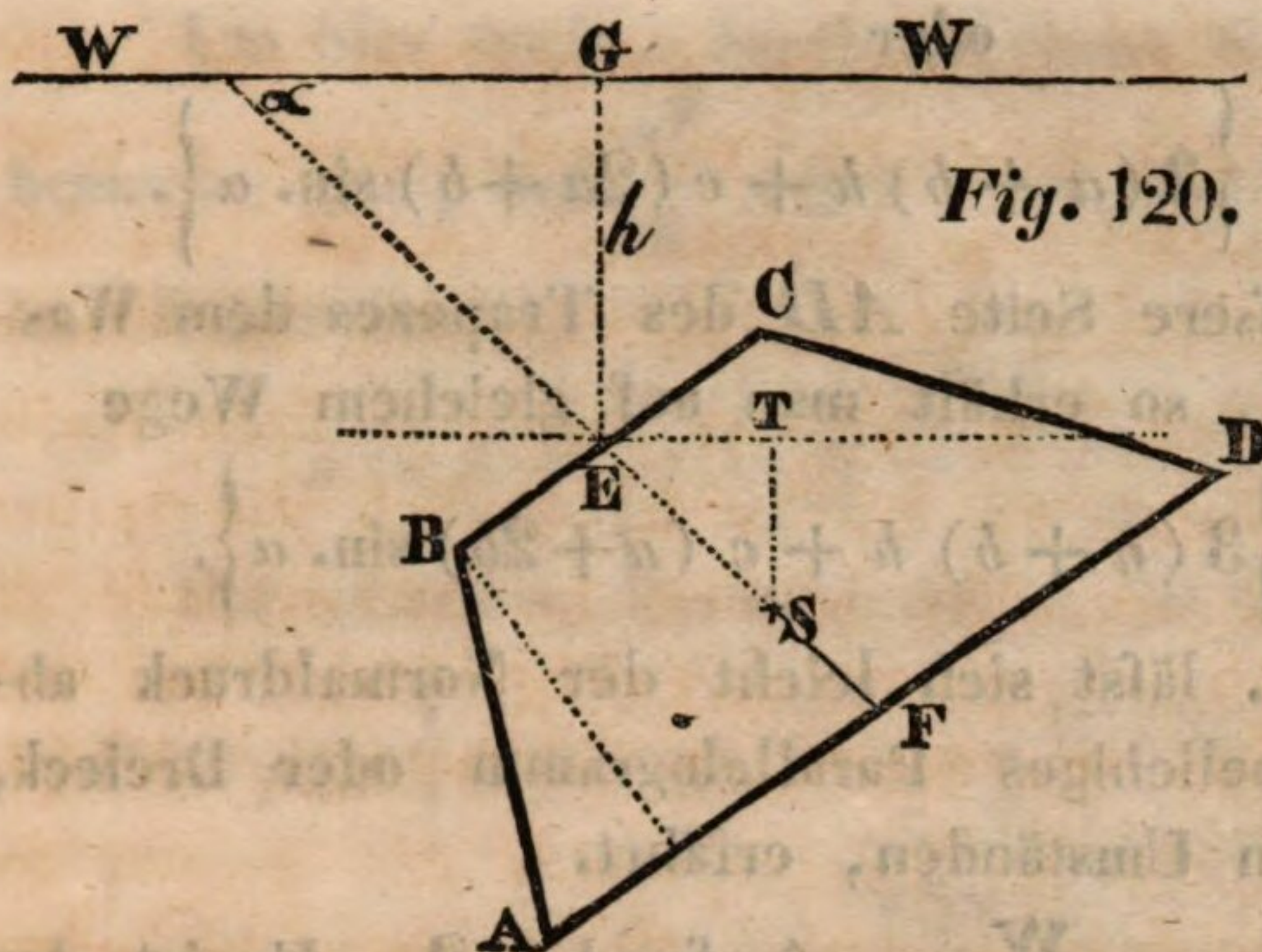


Fig. 120.

Aufgabe 1.

Es ist der Normaldruck des Wassers gegen ein Trapez $ABCD$ Fig. 120 zu bestimmen, welches sich in einer gegen den Wasserspiegel WW oder dem Horizonte unter einem Winkel $= \alpha$ geneigten Ebene befindet, und dessen parallele Seiten AD und BC horizontal sind. Die oberste Seite BC liege unter dem Wasserspiegel in einer verticalen Tiefe $EG = h$, ferner sei $AD = a$, $BC = b$, und der rechtwinklige Abstand letzterer beiden Seiten $EF = c$.

Auflösung. Wir finden zuerst die Druckhöhe des Trapezes und nehmen deshalb an, daß sich der Schwerpunkt derselben in S befindet. Nach §. 32 ist sodann

$$ES = \frac{c}{3} \cdot \frac{2a + b}{a + b},$$

und daher der Verticalabstand ST des Punctes S , von einer durch die oberste Seite BC parallel zum Wasserspiegel gelegten Ebene,

$$ST = \frac{c}{3} \cdot \frac{2a + b}{a + b} \cdot \sin. \alpha.$$

Für die Druckhöhe $= EG + ST = z$ erhält man sonach

$$z = h + \frac{c}{3} \cdot \frac{2a + b}{a + b} \sin. \alpha.$$

Es ist aber der Flächeninhalt des Trapezes $= \frac{c}{3} (a + b)$, folglich der gesuchte Normaldruck $= P$ nach §. 190

$$P = \gamma \cdot \frac{c}{2} (a + b) \left(h + \frac{c}{3} \cdot \frac{2a + b}{a + b} \sin. \alpha \right),$$

oder

$$\text{I. } P = \frac{c\gamma}{6} \left\{ 3(a+b)h + c(2a+b) \sin. \alpha \right\}.$$

Liegt die grössere Seite AD des Trapezes dem Wasserspiegel zugekehrt, so erhält man auf gleichem Wege

$$\text{II. } P = \frac{c\gamma}{6} \left\{ 3(a+b)h + c(a+2b) \sin. \alpha \right\}.$$

Aus I. und II. lässt sich leicht der Normaldruck ableiten, den ein beliebiges Parallelogramm oder Dreieck, unter sonst gleichen Umständen, erfährt.

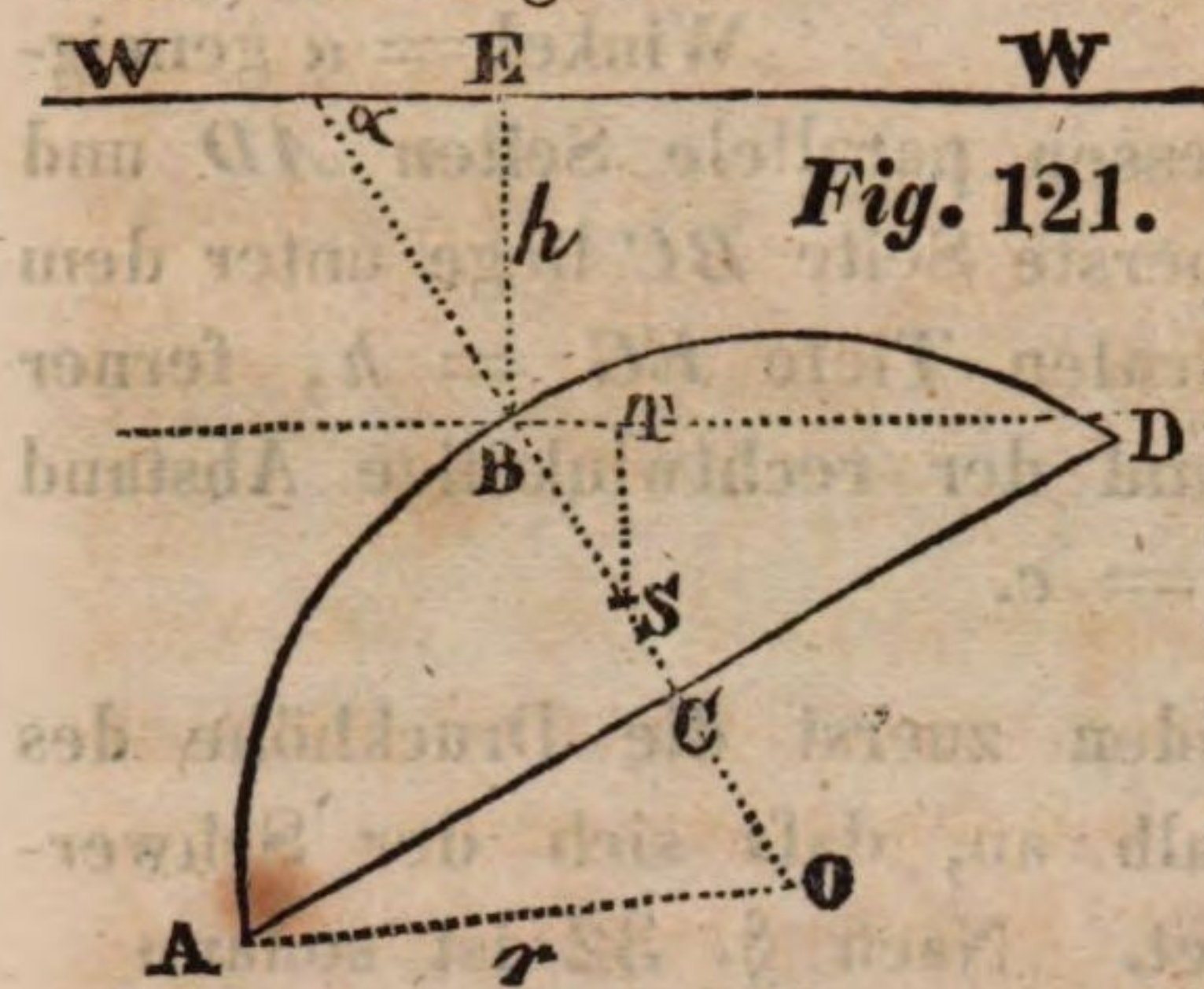


Fig. 121.

Aufgabe 2. Es ist der Normaldruck gegen die Fläche eines Kreisabschnittes $ABDC$ Fig. 121 anzugeben, der gegen den Wasserspiegel unter einem Winkel $= \alpha$ geneigt ist, dessen Sehne AB horizontal, und ferner der Scheitel B des Bogenabschnittes ABD

in der rechtwinkligen Entfernung $BE = h$ unter dem Wasserspiegel WW liegt. Der Flächeninhalt des Abschnittes sei $= A$, die Pfeilhöhe $BC = b$, und der Halbmesser des zugehörigen Kreises $AO = BO = r$.

Auflösung. Zur Bestimmung der Druckhöhe sei wieder S der Schwerpunkt des Segmentes, für welchen

man nach §. 35 erhält $OS = \frac{a^3}{12A}$, wo a die Sehne AD

bezeichnet. Hiernach ist $BS = r - \frac{a^3}{12A}$, sowie die nor-

male Entfernung ST , oder der Abstand des Schwerpunktes von einer durch den Scheitel B zum Wasserspiegel parallel

gelegten Ebene, $ST = \left(r - \frac{a^3}{12A} \right) \sin. \alpha$; folglich die

Druckhöhe $EB + TS = z$

$$(1) \quad z = h + \left(r - \frac{a^3}{12A} \right) \sin. \alpha.$$

Um hier noch a durch gegebene Gröfsen auszudrücken, bemerke man, dafs $\frac{a^2}{4} = 2rb - b^2$, folglich $a = 2b^{\frac{1}{2}}(2r - b)^{\frac{1}{2}}$ ist. Daher aus (1)

$$z = h + \left\{ r - \frac{2}{3} \frac{b^{\frac{3}{2}}(2r - b)^{\frac{3}{2}}}{A} \right\} \sin. \alpha.$$

Der gesuchte Normaldruck $= P$ ist also

$$P = \gamma \cdot A \left\{ h + r \sin. \alpha - \frac{2}{3} \frac{b^{\frac{3}{2}}(2r - b)^{\frac{3}{2}}}{A} \sin. \alpha. \right\},$$

oder

$$\text{I. } P = \gamma \left\{ A(h + r \sin. \alpha) - \frac{2}{3} \cdot b^{\frac{3}{2}}(2r - b)^{\frac{3}{2}} \sin. \alpha \right\}.$$

Ist die gedrückte Fläche ein Halbkreis mit horizontalem Durchmesser, so wird $b = r$, $A = \frac{r^2 \pi}{2}$ und somit, nach gehöriger Zusammenziehung,

$$\text{II. } P = \gamma \frac{r^2}{6} \left\{ 3h\pi + r \sin. \alpha (3\pi - 4) \right\}.$$

Für eine vollständige Kreisfläche, wo $b = 2r$, $A = r^2 \pi$ wird, folgt

$$\text{III. } P = \gamma r^2 \pi (h + r \sin. \alpha).$$

Aufgabe 3. Ein Graben oder Gerinne, in welchem das Aufschlagwasser für ein Wasserrad zugeführt werden soll, ist mit einem hölzernen Schutzbrete zu versehen; es fragt sich, von welcher Dicke man die Bohlen zu nehmen hat, damit diese dem Drucke des Wassers gehörig widerstehen.

Auflösung. Es sei die Länge des Schutzbretes, auf welchem dasselbe in den Seitenführungen frei aufliegt, $= l$, die Breite der untersten, am stärksten gedrückten Bohle $= b$, die unbekannte Dicke der Bohlen $= x$, und die Druckhöhe des Wassers $= H$, so ist zuvörderst der Normaldruck gegen die unterste Bohle $P = \gamma \cdot bl \cdot H$. Nimmt man nun auf die zulässige Biegung des Holzes nicht Rücksicht, so erhält man unmittelbar nach §. 96 die Bedingungsgleichung

$$\frac{8}{6} m_1 \frac{bx^2}{l} = \gamma bl.H; \text{ folglich}$$

$$x = \frac{l}{2} \sqrt[3]{\frac{\gamma H}{m_1}}.$$

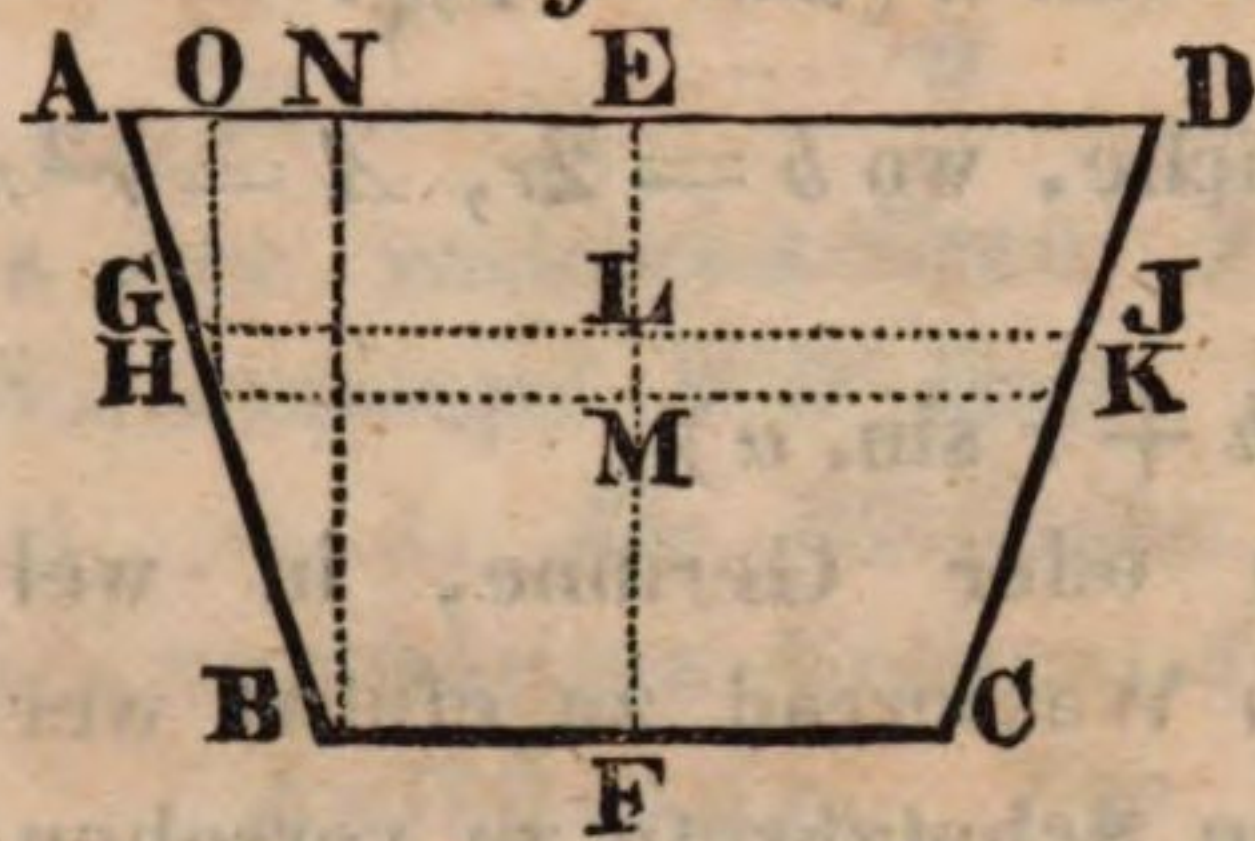
Bei Beachtung der Biegung hat man vorerst, nach §. 99, $\frac{5}{8}$ des Normaldruckes in der Mitte der Fläche als wirksam anzunehmen, rechnet man sodann eine Biegung von $\frac{1}{288}$ der Länge noch als zulässig, so folgt aus §. 100, in-

dem, daselbst in der entsprechenden Gleichung $u = \frac{1}{288} \cdot l$ gesetzt wird,

$$\frac{1}{72} \cdot \frac{Ebx^3}{l^2} = \frac{5}{8} \cdot \gamma bl.H, \text{ daher}$$

$$x = l \sqrt[3]{\frac{\gamma H}{45E}}.$$

Fig. 122.



Aufgabe 4. Ein hohler, gerader, mit der kreisförmigen Grundfläche parallel abgekürzter Kegel, dessen Verticaldurchschnitt $ABCD$ Fig. 122 sein mag, ist ganz mit Wasser ausgefüllt; es soll der Druck angegeben werden, den die gesamte Mantelfläche desselben erfährt. Der Halbmesser der Grundfläche sei $BF = FC = r$, der der Endfläche $AE = ED = R$, die normale Höhe $EF = H$, und die Seitenlänge $AB = DC = L$.

Auflösung. Da bei der Bestimmung der Schwerpunkte krummer Flächen S. 53 der vom Mantel eines abgekürzten Kegels nicht besonders angegeben worden ist, so werde zur Auflösung unserer Aufgabe nachfolgender besonderer Weg eingeschlagen.

Man theile durch Ebenen, welche einander unendlich nahe und zur Grundfläche parallel sind, den ganzen Kör-

per in Elemente, so dafs für alle Punkte des Mantels eines und desselben Elementarkörpers einerlei Druckhöhe angenommen werden kann.

Für ein beliebiges Element $GHIK$ sei die Druckhöhe $EM = x$, der mittlere Halbmesser $= y$, und die Höhe $LM = \delta$. Der Druck $= p$ auf den Mantel dieses Elementes wird daher sein

$$p = \gamma \cdot 2 y \pi \cdot GH \cdot x.$$

Um hier zunächst GH durch gegebene Gröfsen auszudrücken, bemerke man, dafs sich verhalten mufs $GH : LM = AB : EF$, woraus

$$GH = \frac{\delta \cdot L}{H} \text{ folgt, somit}$$

$$(1) \quad p = \gamma \cdot 2 y \pi \cdot \frac{\delta \cdot L}{H} \cdot x \text{ ist.}$$

Um ferner noch y als Function von x auszudrücken, ziehe man $OH \parallel NB \parallel EF$, wonach sich verhalten mufs $AO : OH = AN : NB$, d. i. $R - y : x = R - r : H$, so dafs sich ergibt

$$y = R - \frac{(R - r) x}{H};$$

mithin wird aus (1)

$$p = \gamma \cdot 2\pi \frac{L\delta}{H} \left\{ Rx - \frac{(R - r.)}{H} x^2 \right\}.$$

Mit Hilfe dieses Werthes kann zunächst der Druck gegen den Mantel $AHKD$ angegeben werden, indem nur nöthig sein wird, für x auf einander folgend δ , 2δ , 3δ zu setzen und die so enthaltenen Ausdrücke zu summiren. Auf solche Weise erhält man:

$$\gamma \cdot 2\pi \cdot \frac{L\delta}{H} \left\{ R\delta(1+2+3\dots) - \frac{(R-r)}{H} \delta^2 (1+2^2+3^2\dots) \right\},$$

sowie nach bekannter Voraussetzung

$$\gamma \cdot 2\pi \frac{L}{H} \left\{ \frac{R(n\delta)^2}{2} - \frac{R-r}{H} \frac{(n\delta)^3}{3} \right\};$$

oder, da $n\delta = x$ sein mufs,

$$\gamma \cdot 2\pi \frac{L}{H} \left\{ \frac{Rx^2}{2} - \frac{1}{3} \frac{R-r}{H} \cdot x \right\}.$$

Hiernach ergibt sich aber, wenn $x = H$ gesetzt wird, der Druck $= P$ auf die gesammte Mantelfläche des abgekürzten Kegels:

$$\text{I. } P = \gamma \cdot 2\pi LH \left(\frac{1}{6} R + \frac{1}{3} r \right).$$

Für $r = 0$ wird aus dem abgekürzten Kegel ein ganzer, dessen Spitze nach unten gekehrt ist, somit auch für den Druck auf den Mantel eines solchen

$$\text{II. } P = \gamma \cdot 2\pi RL \cdot \frac{1}{6} H = \gamma \cdot 2\pi R \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{H}{3}.$$

Für $R = 0$ erhält man ebenso den Druck für einen Kegel, dessen Spitze nach oben gerichtet ist,

$$\text{III. } P = \gamma \cdot 2\pi r \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{2}{3} H.$$

Endlich für den geraden Cylinder, wenn $R = r$, $L = H$ gesetzt wird,

$$\text{IV. } P = \gamma \cdot 2\pi RH \cdot \frac{1}{2} H.$$

Aufgabe 5. Man soll ebenso den Druck auf die gesammte Innenfläche eines mit Wasser gefüllten Kugelsegmentes angeben, wenn dessen kreisförmige Begränzungsebene mit dem Wasserspiegel zusammenfällt.

Auflösung. Bezeichnet man mit h die Höhe des Segmentes und mit ρ den Halbmesser des Begränzungskreises, so ist zufolge §. 39 die Druckhöhe $= \frac{1}{2} h$, folglich, da der Inhalt der ganzen gedrückten Fläche $= 2\rho\pi h$ ist, der gesuchte Druck

$$P = \gamma \cdot 2\rho\pi h \cdot \frac{1}{2} h.$$

§. 193.

Druck des Wassers nach bestimmten Richtungen.

Bei technischen Untersuchungen u. s. w. wird es sehr oft nöthig, den Druck anzugeben, welchen das Wasser gegen Gefäßwände nach einer vorgeschriebenen Richtung, die von der des Normaldruckes verschieden ist, ausübt. Nach-

man aus (1), wenn $a \cos. \alpha = f$ gesetzt wird, für den Druck $= p$ nach der Richtung EC :

$$p = \gamma \cdot fh.$$

Es ist also der Druck des Wassers nach irgend einer Richtung gegen eine beliebige Elementarfläche gleich dem Normaldrucke gegen die rechtwinkelig zur bezeichneten Richtung genommene Projection der Elementarfläche, wenn für beide Fälle einerlei Druckhöhe vorausgesetzt wird. Ueberhaupt ergibt sich aber der wichtige Satz:

Der Druck, welchen ein beliebiges Element einer Gefäßwand nach irgend einer bestimmten Richtung erfährt, wird stets erhalten, wenn man die Projection dieses Elementes auf eine Ebene sucht, welche rechtwinkelig auf der bezeichneten Richtung steht, und die Fläche der Projection mit der Druckhöhe multiplicirt, die der gedrückten Fläche zukommt.

§. 194.

Sehr leicht läßt sich nun zeigen, daß der Satz des vorigen §. auf jede ebene Fläche von beliebiger Ausdehnung anwendbar ist, wenn man den in §. 190 gewählten Weg auch hier einschlägt.

Am meisten hat man bei technischen Fragen den Druck in horizontaler und verticaler Richtung gegen ebene Flächen anzugeben, weshalb Nachstehendes hier noch Platz finden mag.

Es stelle AB Fig. 123 das Profil eines Rechtecks dar, welches gegen den Horizont unter einem Winkel φ geneigt ist, dessen obere Seite mit dem Wasserspiegel zusammenfällt, und wovon a die Höhe, b die Breite bezeichnet. Der Normaldruck $= P$ gegen diese Fläche ist sodann nach §. 190 $P = \gamma ab \cdot \frac{1}{2} a \sin. \varphi = \frac{1}{2} \cdot \gamma a^2 b \cdot \sin. \varphi$.

Der Horizontaldruck $= H$ und der Verticaldruck $= V$ folgt aber, nach dem Vorstehenden,

$H = P. \sin. \varphi = \frac{1}{2} \gamma. a^2 b \sin. \varphi^2 = \gamma. ab \sin. \varphi. \frac{1}{2} a \sin. \varphi,$
 $V = P. \cos. \varphi = \frac{1}{4} \gamma. a^2 b \sin. 2 \varphi = \gamma. ab \cos. \varphi. \frac{1}{2} a \sin. \varphi,$
 woraus sich überdieß für diese Drücke leicht Regeln ableiten lassen.

Endlich wird noch zu beachten sein, dafs, wenn φ ein stumpfer Winkel, die Wand also nach einwärts geneigt ist, der Ausdruck für V negativ wird, was ganz richtig anzeigt, dafs sodann der Verticaldruck von unten nach oben gerichtet ist. (Vergl. hiermit §. 187.)

§. 195.

Unanwendbar könnte der Satz des §. 193 auf den Druck erscheinen, den irgend eine krumme Fläche von willkürlicher Gröfse nach einer bestimmten Richtung erfährt, indem hier die Normaldrücke auf die Elemente der krummen Fläche nicht, wie bei ebenen Flächen, unter einander parallel gerichtet sind.

Um hierüber Aufschluß zu erhalten, bestimmen wir den Normaldruck auf jedes Element der krummen Fläche und zerlegen jeden solchen nach §. 18 in drei Seitenkräfte, die respective dreien rechtwinkligen Coordinatenaxen parallel sind, und worauf sich die zugehörigen Mittelkräfte werden finden lassen. Allein für unseren Fall, wo der Druck nur nach einer vorgeschriebenen Richtung angegeben werden soll, braucht der letztere Theil der bemerkten Arbeit nicht vorgenommen zu werden, wenn man nur eine der drei Coordinatenaxen in die bezeichnete Richtung legt. Hat man z. B. die Axe der Z , die auf der Ebene XY rechtwinkelig steht, in der vorgeschriebenen Druckrichtung angenommen, so wird nur nöthig sein, den Normaldruck auf jedes Element mit dem Cosinus des Winkels zu multipliciren, den die Richtung jenes Druckes mit der Axe der Z , oder, was dasselbe ist, den die Berührungsebene für ein solches Element mit der Ebene XY macht. Die Producte dieser Elemente in die respectiven Cosinus sind sodann nichts Anderes, als die Projectionen der Elemente auf die Ebene XY . Legt man daher diesen Projectionen, wie es

§. 190 geschah, Gewichte bei, so läßt sich auf dem an gedachtem Orte gewählten Wege auch hier überhaupt zeigen,

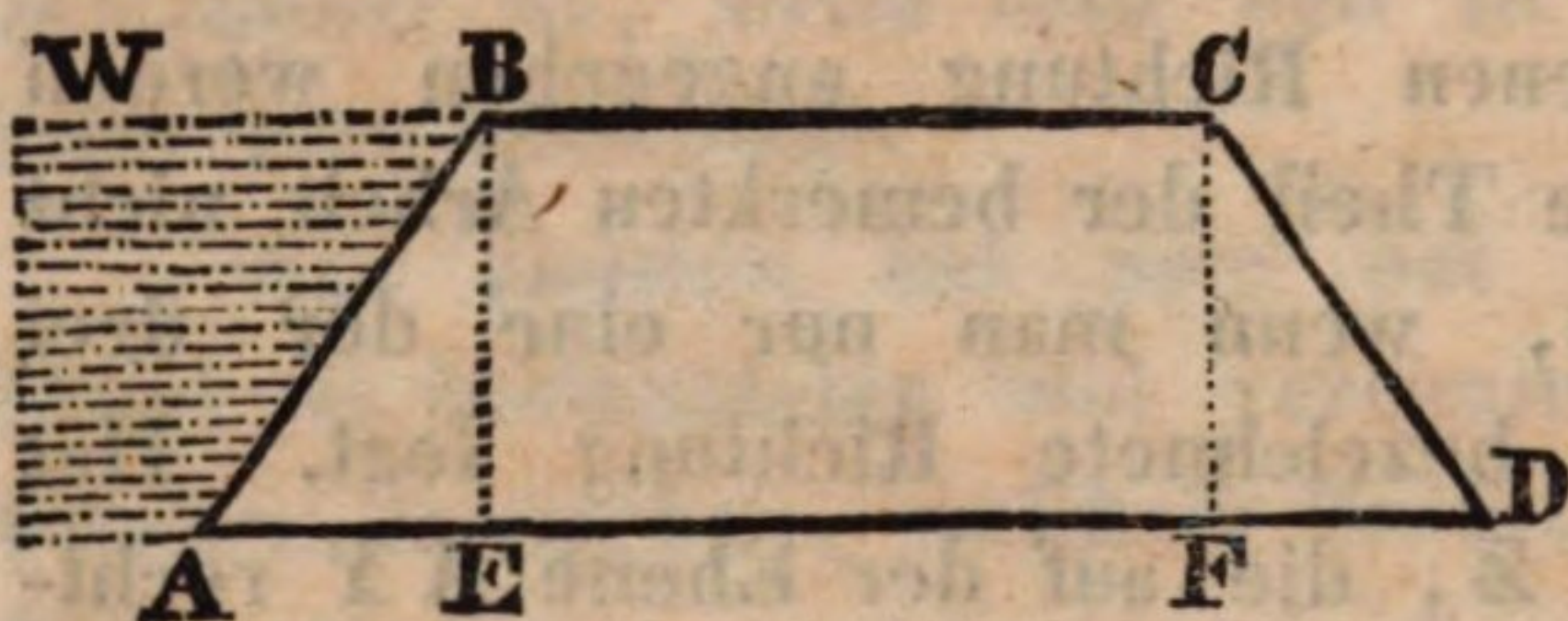
dafs der Druck nach einer bestimmten Richtung gegen eine krumme Fläche gleich dem Gewichte einer Wassersäule ist, welche die rechtwinkelig zur bezeichneten Richtung genommene Projection der krummen Fläche zur Basis und die Druckhöhe der krummen Fläche zur Höhe hat.

§. 196.

Aufgaben zur Anwendung des Gesetzes über den Druck des Wassers nach vorgeschriebenen Richtungen.

Aufgabe 1. Man soll die obere oder Kronen-Breite eines aus Erde aufgeführten Deichdammes angeben, damit derselbe vom Wasserdrucke nicht über seine Grundfläche fortgeschoben werden kann. Der Wasserstand reiche übrigens genau bis zur Krone.

Fig. 124.



Auflösung. Es sei $ABCD$ Fig. 124 das wenigstens der Form nach festgestellte Dammprofil, seine Höhe $BE = CF = h$, die beiden gleichen Böschungen $AE = FD$ mögen als das m fache der Höhe, d. i., $= mh$, angenommen sein, ferner betrage die Dammlänge $= l$, das Gewicht der Cubikeinheit Erde $= q$, und der Coefficient der Reibung zwischen Dammkörper und seiner Grundfläche $= f$.

Für den Zustand des Gleichgewichtes wird nun letztgedachte Reibung dem Horizontaldrucke des Wassers das Gleichgewicht halten müssen. Der die Reibung erzeugende Druck besteht aber aus dem Gewichte des Dammkörpers,

vermehrt um den Verticaldruck des Wassers, so daß man überhaupt die Bedingungsgleichung erhält:

$$\frac{1}{2} \gamma h^2 l = f \cdot qhl (x + mh) + f \cdot \frac{1}{2} \gamma mh^2 l,$$

woraus x leicht gefunden werden kann.

In vielen Fällen wird man indess annehmen müssen, daß der Dammkörper nach und nach ganz vom Wasser durchdrungen wird, so daß statt obigen Gewichtes des Dammes, $(q - \gamma) hl (x + mh)$ in Rechnung zu bringen, der Verticaldruck $\frac{1}{2} \gamma mh^2 l$ des Wassers aber ganz wegzulassen sein wird, indem diesen das Grundwasser des Bodens im Gleichgewicht hält. Nimmt man überdies, der Sicherheit wegen, von dem Horizontaldruck das $1\frac{1}{2}$ fache in Rechnung, so folgt überhaupt

$$\frac{3}{4} \gamma h^2 = f (q - \gamma) (x + mh) h,$$

mithin die gesuchte Kronenbreite

$$x = \frac{3\gamma h}{4f(q - \gamma)} - mh.$$

Aufgabe 2. Es soll der Druck angegeben werden, welchen in verticaler Richtung die krummen Flächen nachbemerakter Gefäße erfahren, wenn solche ganz mit Wasser gefüllt sind, nämlich

- a) die Mantelfläche eines Hohlkegels mit verticaler Axe und kreisförmiger Basis, dessen Spitze nach oben gekehrt ist;
- b) die Innenfläche einer Halbkugel, deren größter Kreis mit dem Wasserspiegel zusammenfällt.

Auflösung. Es bezeichne r den Halbmesser der Kegelbasis, sowie den der Kugel, ferner h die Höhe des Kegels. Für beide Fälle ist die Projection der gedrückten Fläche rechtwinkelig gegen die Verticale (die Horizontalprojection) $= r^2 \pi$, die Druckhöhe für den Kegel, nach §. 38, $= \frac{2}{3} h$, dagegen für die Halbkugel, nach §. 39, $= \frac{1}{2} r$, mithin der anzugebende Druck

$$\text{für den Kegel: } \gamma \cdot r^2 \pi \cdot \frac{2}{3} h = \frac{2}{3} \gamma \pi r^2 h;$$

$$\text{für die Kugel: } \gamma \cdot r^2 \pi \cdot \frac{1}{2} r = \frac{1}{2} \gamma r^3 \pi.$$

Aufgabe 3. Man soll die erforderliche Stärke cylinderischer Röhren mit kreisförmigem Querschnitte angeben, damit solche einem bestimmten, von Innen nach Aussen gerichteten Wasserdrucke mit Sicherheit widerstehen können.

Auflösung. Von der Erfahrung hinlänglich bestätigt, kann man vorerst annehmen, dafs eine cylinderische Röhre, bei der angegebenen Druckwirkung, gegen Querrisse, die zu ihrer Axe rechtwinkelig sind, stets einen bei Weitem gröfseren (ungefähr doppelten) Widerstand leistet, als gegen Längensrisse parallel zu gedachter Axe. Ferner werde angenommen, dafs durch dergleichen Längensrisse ein betreffendes Stück der Röhre, gleichsam wie von einer durch die Axe geführten Ebene, in zwei gleiche Hälften getheilt wird, sowie endlich, dafs alle Punkte eines und desselben normalen Querschnittes gleichen Widerstand gegen Trennung äufsern.

Für den Zustand des Gleichgewichtes wird sodann die absolute Festigkeit einer Röhre in den gedachten Längensrisen dem Wasserdrucke nach entsprechender Richtung gleich sein müssen.

Es bezeichne nun D den inneren Durchmesser der Röhre, l die Länge irgend eines Stückes derselben, welchem die Druckhöhe H entspricht, x die zu suchende Wanddicke, und m das Mafs der absoluten Festigkeit. Denkt man sich sodann das Röhrenstück vertical gestellt oder horizontal gelegt, so ist der Normaldruck gegen die Projection der inneren Fläche auf die Ebene, welche das Röhrenstück in zwei gleiche Hälften theilt,

$$\gamma D l H.$$

Der Widerstand gegen Trennung in der Fläche $2xl$ der beiden Längensrisse ist, nach §. 85,

$$2mxl, \text{ folglich}$$

$$2mxl = \gamma D l H, \text{ d. i.}$$

$$1. \quad x = \frac{\gamma}{2m} \cdot DH.$$

Hierbei ist natürlich vorausgesetzt, dafs D, H und γ

nach analogen Längen und analogem Cubikmaße genommen sind, als das Flächenmaße, worauf sich m bezieht.

Um diesen gefundenen Ausdruck für die Praxis möglichst brauchbar zu machen, sind an demselben entsprechende Correctionen anzubringen. Vorerst ist klar, daß er nicht eine solche Form behalten kann, wo für $H = 0$ auch $x = 0$ wird, da wegen der eigenen Stabilität der Röhre, selbst wenn kein Druck stattfindet, ferner bei gegossenen Röhren, wenn der Guß überhaupt noch möglich sein soll, immerhin eine gewisse Wanddicke vorhanden sein muß. Sodann wird es auch sicherer sein, den für gleiches Material und dieselbe Flüssigkeit constanten Factor $\frac{\gamma}{2m}$ durch directe Versuche zu ermitteln. Bezeichnet daher c die kleinste Dicke, welche man einer Röhre überhaupt noch geben darf, und wird $\frac{\gamma}{2m} = \mu$ gesetzt, so folgt aus I. II. $x = \mu \cdot DH + c$.

Nach D'Aubuisson *) ist für gußeiserne Röhren und Metermaße $\mu = 0,00015$, $c = 0,^m01$, folglich für dieses Material $x = 0,^m00015 DH + 0,^m01$.

Sehr empfehlenswerth sind die für μ und c aus Erfahrung entnommenen Werthe Genieys **). Derselbe führt in II. statt H die Anzahl der Atmosphären $= n$ ein, die dem jedesmaligen Drucke entsprechen, jede derselben zu 10 Meter Druckhöhe gerechnet, und setzt sodann, alle Maße in Metern ausgedrückt,

für bleierne Röhren $x = 0,005 nD + 0,0045$,
 - gußeiserne - $x = 0,0007 nD + 0,01$,
 - Röhren von Eisenblech $x = 0,0005 nD + 0,003$,
 - - natürlichem Gestein $x = 0,05 nD$,
 - - künstlichem - (Cement) $x = 0,1 nD$,
 hölzerne Röhren $x = 0,833 nD + 0,027$.

*) Traité d'hydraulique; 2e. éd. Paris 1840, p. 252.

**) Essai sur les moyens de conduire, d'élever et de distribuer les eaux par Mr. Genieys. Paris 1829, p. 177.

D'Aubuisson, wie Genieys rathen übrigens, um recht sicher zu gehen, alle Röhren auf 100 Meter Druckhöhe zu prüfen, wonach in die Formel des ersteren $H = 100$, in die Formeln des letzteren $n = 10$ gesetzt werden müßte.

Anmerkung. Der Ausdruck l. wurde zuerst von Mariotte unter ähnlichen Voraussetzungen abgeleitet, und mit den angebrachten Correctionen ist derselbe unbedingt als für praktische Rechnungen brauchbar anzunehmen. In neuerer Zeit hat man sich jedoch bemüht, Formeln auf Voraussetzungen basirt zu construiren, welche der Natur der Sache mehr entsprechen, als die von Mariotte gemachten, und wobei Correctionen in dem obigen Sinne weniger oder gar nicht nothwendig werden.

Das meiste Vertrauen verdienen in dieser Beziehung die Formeln des Herrn Professor Barlow in Woolwich und des Herrn Commissionsrathes Brix in Berlin, weshalb wir über diese Nachstehendes anführen wollen *).

Beide genannte Männer gehen hauptsächlich von der gewiss richtigen Ansicht aus, daß man nicht von Elasticität und Ausdehnung der Röhre völlig absehen dürfe, wie dieß von Mariotte geschehen ist.

Barlow gründet seine Formel sodann auf die Hypothese, daß durch die dem Zerreißen vorangehende Ausdehnung die ringförmigen Querschnitte der Röhren gleichen Flächeninhalt behalten, und weist nach, daß sich diesem zufolge die Widerstände oder Spannungen in den verschiedenen concentrischen Peripherieen der Röhre umgekehrt wie die Quadrate der zugehörigen Durchmesser verhalten. Hiernach entwickelt Barlow die Formel

$$x = \frac{pr}{m-p},$$

wo x und m die bisherigen Bedeutungen haben, r den inneren Röhrenhalbmesser, und p den Druck auf dieselbe Flächeneinheit (der inneren Röhrenfläche) bezeichnet, worauf sich m bezieht.

Brix geht bei Entwicklung seiner Formel von dem Grundsatz aus, daß für jede Ausdehnung der Röhre, welche innerhalb der Grenzen der vollkommenen Elasticität bleibt, die Dicke der Röhrenwand keine Aenderung erleidet, und zeigt sodann, daß sich hiernach die Widerstände in den verschiedenen concentrischen Peripherieen umgekehrt wie die zugehörigen Durchmesser verhalten. Hiernach ergibt sich die Formel

*) Ausführlicheres hierüber enthält die werthvolle Arbeit des Herrn Commissionsrathes Brix, „Bestimmung der Röhrenwandstärke u. s. w.“ im Jahrgange 1834, S. 119 der Verhandlungen des Vereines zur Beförderung des Gewerbflusses in Preußen.

$$x = r \left(e^{\frac{p}{m}} - 1 \right),$$

wobei e die bekannte Zahl $= 2,71828$ ist (§. 61), alle übrigen Gröfsen die vorige Bedeutung haben.

Barlow's Formel wird namentlich von den Engländern für praktische Rechnungen als völlig brauchbar gehalten. Wir bezweifeln indess mit Herrn Brix die Richtigkeit ihrer Theorie besonders deshalb, weil sie für $m = p$ die Wandstücke unendlich groß, ja für $m < p$ negativ giebt, während beide Fälle noch innerhalb der Möglichkeitsgränze liegen. In Preussen hat man neuerdings für die Bestimmung der Wandstücke bei Dampfkesseln aus Eisenblech Brix Formel gesetzmäfsig vorgeschrieben. Die in Frankreich gesetzliche Formel für denselben Zweck ist II. völlig ähnlich, nämlich

$$x = 0,018 (n-1) D + 3,$$

wo x die Wandstücke in Millimetern, D den inneren Durchmesser des cylinderischen Kessels in Centimetern und n die Zahl der Atmosphären bezeichnet, welche dem Dampfdrucke entsprechen.

Aufgabe 4. Für sonst gleiche Umstände der vorigen Aufgabe soll die nothwendige Wanddicke für ein kugelförmiges Gefäß angegeben werden.

Auflösung. Nehmen wir, Erfahrungen zufolge, an, dafs die Kugel in der Richtung eines ihrer grössten Kreise zu reissen beginnt, so ist der Druck des Wassers gegen die Projection der Halbkugelfläche, welcher die Trennung zu bewirken sucht, wenn D den Kugeldurchmesser bezeichnet,

$$\frac{\gamma D^2 \pi}{4} \cdot H;$$

sowie der Widerstand, vermöge der absoluten Festigkeit,

$$m x D \pi.$$

Für das Gleichgewicht also

$$m x D \pi = \gamma \frac{D^2 \pi}{4} \cdot H; \text{ d. g.}$$

$$x = \frac{\gamma}{4m} \cdot D H.$$

Aus der Vergleichung dieses Werthes mit dem I. der vorigen Aufgabe ergibt sich daher, dafs bei sonst gleichen Umständen die Wanddicke einer Kugel nur halb so groß zu sein braucht, als solches für eine cylinderische Röhre

der Fall ist. Für die Praxis wird man daher sicher genug gehen, wenn man für die Wanddicke kugelförmiger Gefäße, halbkugelförmiger Ansätze u. s. w. $\frac{2}{3}$ der Werthe nimmt, welche aus den corrigirten Formeln der vorigen Aufgaben folgen.

§. 197.

Vom Mittelpuncte des Druckes.

Unter dem Mittelpuncte des Druckes versteht man den Angriffspunct der Mittelkraft, welche den sämtlichen, auf die einzelnen Puncte einer Seitenwand wirkenden Normaldrücken des Wassers entspricht. Zur Bestimmung statischer Momente ist natürlich die Kenntniß der Lage dieses Punctes durchaus nothwendig.

Bei (horizontalen) Bodenflächen, wo alle Elemente gleichen Druck erfahren, fällt der Mittelpunct des Druckes mit dem Schwerpuncte zusammen. Bei allen Seitenwänden liegt er dagegen stets unter dem Schwerpuncte derselben, weil hier die Drücke auf die einzelnen Puncte mit deren Tiefe unter dem Wasserspiegel zunehmen.

Zuerst werde der Mittelpunct des Druckes für ebene Seitenwände bestimmt, was nach dem Früheren einfach darin bestehen wird, den Angriffspunct der Mittelkraft für ein System paralleler Kräfte zu suchen.

Für den Fall, daß die gedrückte Seitenwand durch eine gerade Linie in zwei symmetrische Theile getheilt wird, also zu beiden Seiten derselben gleiche Momente liegen, muß sich der zu suchende Angriffspunct in dieser Geraden befinden, und man wird nur nöthig haben, dessen Abstand von einer geraden Linie anzugeben, welche man in der Ebene der gedrückten Fläche als Momentenaxe angenommen hat.

Der Einfachheit wegen wählt man letztere entweder so, daß sie, durch den höchsten Punct der Fläche gehend, parallel zum Wasserspiegel liegt, oder daß sie mit der Linie zusammenfällt, in welcher die Ebene der gedrückten Fläche den Oberwasserspiegel schneidet.

Die gedrückte Fläche theilt man sodann in Elemente, deren Begrenzungslinien parallel zur Momentenaxe sind, bestimmt die statischen Momente der Normaldrücke, welche diese Elemente erfahren, und dividirt deren Summe durch den Normaldruck auf die Gesamtfläche; der Quotient giebt den gesuchten Abstand des Druckmittelpunctes.

Läfst sich die Seitenwand nicht, wie vorbemerkt, durch eine Gerade theilen, so hat man die Momente der Druckelemente noch in Bezug auf eine zweite Axe zu bestimmen, welche erstere unter einem (rechten) Winkel schneidet und gleichfalls in der Ebene der gedrückten Wand liegt u. s. w.

Um den Mittelpunkt des Druckes für ein krummes Wandstück zu bestimmen, hat man, wie bereits §. 195 angegeben, die Normaldrücke auf die Elemente der krummen Fläche in Seitenkräfte zu zerlegen, welche dreien rechtwinkligen Coordinatenaxen parallel sind, zu jedem der so erhaltenen drei Systeme paralleler Kräfte die entsprechende Mittelkraft, sowie nach §. 17 den Angriffspunct jeder derselben zu bestimmen.

Diese ihrer Lage und Gröfse nach so bestimmten Mittelkräfte lassen sich jedoch nur unter besonderen Umständen in eine einzige Mittelkraft verwandeln; ist daher Letzteres nicht der Fall, so kann natürlich von einem Mittelpuncte des Druckes im obigen Sinne nicht die Rede sein *). Zu den bemerkten Fällen, wo eine einzige Mittelkraft möglich ist, gehört namentlich der, wenn die gedrückte Wand die Flüssigkeit überall umgiebt, wie später (§. 199) gezeigt werden wird.

*) Wegen des Ausführlichen über diesen Gegenstand müssen wir auf Werke verweisen, wo zur Auffindung hydrostatischer Gesetze Differenzial- und Integralrechnung benutzt wird. Besonders empfehlenswerth wegen der manchfachen nützlichen Aufgaben scheint uns hierzu

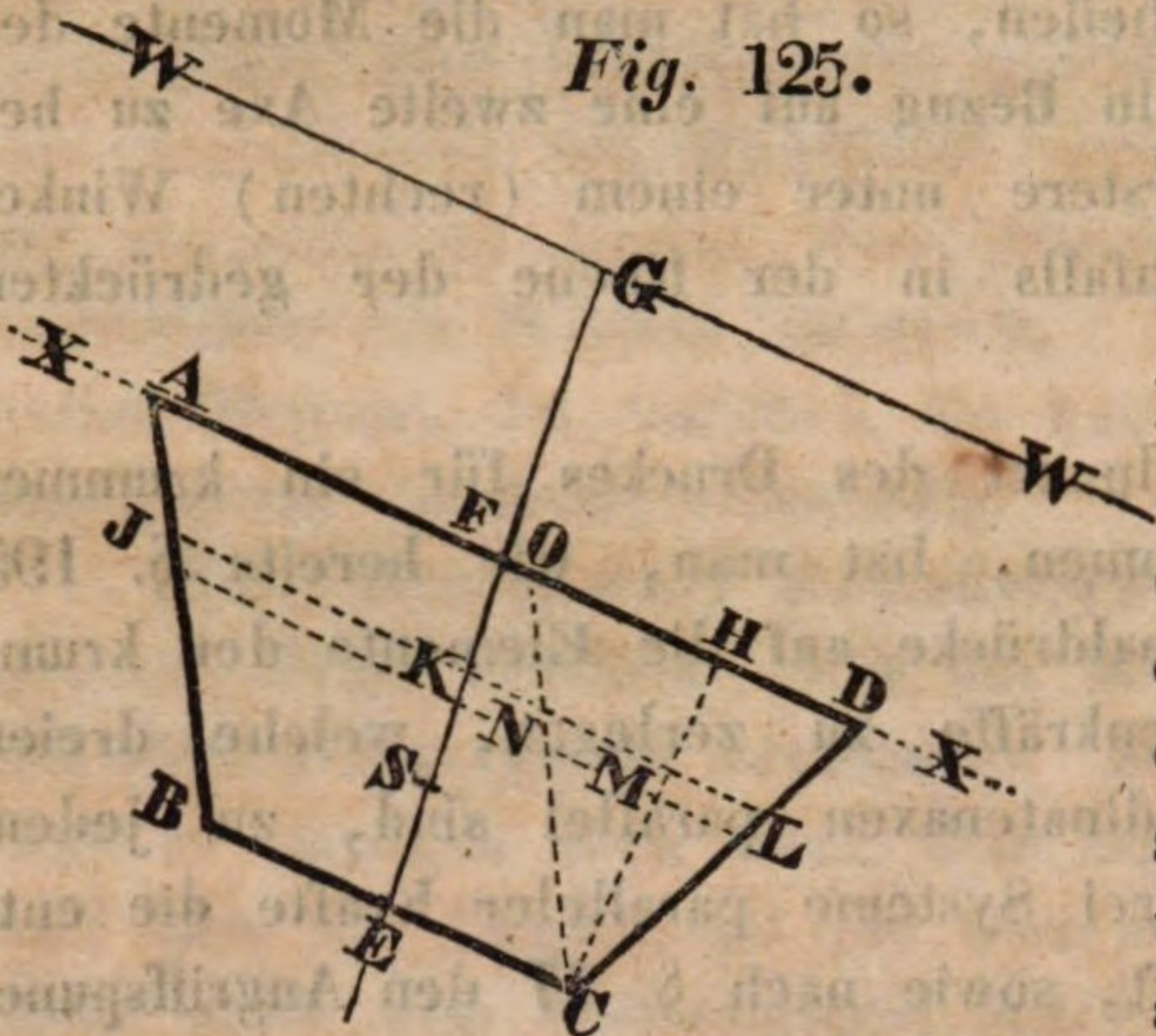
A Treatise on Hydrostatics and Hydrodynamics, by H. Mosely, Cambridge 1830. Art. 49.

§. 198.

Für die Anwendung der Sätze vom Mittelpuncte des Druckes folgen hier einige Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll den Mittelpunkt des Druckes bei einem Trapeze finden, dessen parallele Seiten horizontal liegen, und welches gegen den Horizont unter einem beliebigen Winkel α geneigt ist.

Fig. 125.



Auflösung. Es sei $ABCD$ Fig. 125 das gegebene Trapez, WW die Durchschnitteinie der Ebene, in welcher dasselbe liegt mit dem Wasserspiegel, EG eine Gerade, welche die Trapezfläche in zwei symmetrische Theile theilt. Die Momentenaxe XX nehmen wir

mit der oberen, größeren Parallele des Trapezes zusammenfallend an und setzen deren Verticalabstand vom Wasserspiegel $= h$.

Ferner sei $AD = a$, $BC = b$, der Normalabstand dieser Parallelen $CH = l$, die Entfernung des Druckmittelpunctes S von AD , d. i. $SF = z$, JL ein Element der Fläche in der Entfernung $FK = x$ von AB , $JL = y$ die Länge dieses Elementes, und dessen unendlich kleine Breite $= \delta$.

Der Normaldruck gegen JL ist sodann $\gamma \cdot y \delta (h + x \sin. \alpha)$, das Moment dieses Druckes in Bezug auf die Axe XX :

$$\gamma \cdot xy \delta (h + x \sin. \alpha),$$

folglich, wenn P den Normaldruck bezeichnet, welchen die gesammte Trapezfläche erfährt,

$$Pz = \Sigma \left\{ \gamma xy \delta (h + x \sin. \alpha) \right\}.$$

Um y als Function von x auszudrücken, werde $CO \parallel AB$ gezogen, so daß sich verhält

$$\frac{CH : CM = OD : NL, \text{ d. i. }}{l : l - x = a - b : y - b, \text{ woraus}}$$

$$y = a - \frac{a-b}{l} \cdot x \text{ folgt, daher}$$

$$P_z = \gamma \delta \sum \left\{ \left(ax - \frac{a-b}{l} x^2 \right) (h + x \sin. \alpha) \right\},$$

oder

$$P_z = \gamma \delta \sum \left\{ ahx - \frac{a-b}{l} hx^2 + ax^2 \sin. \alpha - \frac{a-b}{l} \cdot x^3 \sin. \alpha \right\}.$$

Die angedeutete Summe wird man aber erhalten, wenn man auf einander folgend $\delta, 2\delta, 3\delta \dots$ statt x setzt, überhaupt aber wie in früheren ähnlichen Fällen verfährt, so daß zuletzt, wegen $n\delta = x$, folgt

$$P_z = \gamma \left\{ \frac{ahx^2}{2} - \frac{a-b}{l} \cdot h \frac{x^3}{3} + a \sin. \alpha \frac{x^3}{3} - \frac{a-b}{4l} \sin. \alpha \cdot x^4 \right\};$$

oder für die ganze Trapezfläche, wo $x = l$ zu setzen ist, nach gehöriger Zusammenziehung

$$P_z = \frac{\gamma l^2}{12} \left\{ 2h(a + 2b) + l \sin. \alpha (a + 3b) \right\}.$$

Endlich ist nach Aufgabe 2 §. 192

$$P = \frac{l\gamma}{6} \left\{ 3h(a + b) + l \sin. \alpha (a + 2b) \right\},$$

folglich

$$z = \frac{1}{2} l \cdot \frac{2h(a + 2b) + l \sin. \alpha (a + 3b)}{3h(a + b) + l \sin. \alpha (a + 2b)}.$$

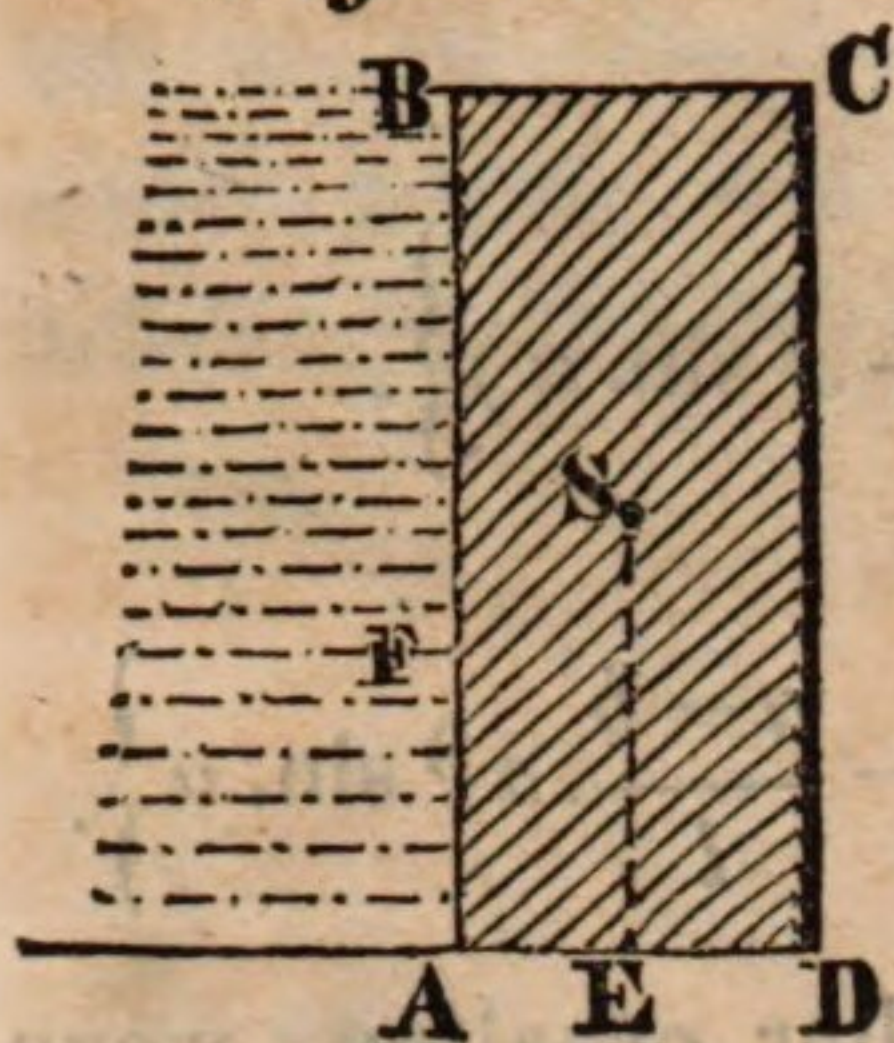
Man begreift leicht, daß dieser Ausdruck, unter sonst gleichen Umständen, auch dazu dienen kann, den Druckmittelpunct bei einem Trapez zu bestimmen, dessen kleinere Parallele dem Wasserspiegel zugekehrt ist; ferner bei einem beliebigen Parallelogramme oder Dreiecke.

So erhält man z. B. bei einem vertical stehenden Rechtecke, wo $a = b$, $\sin. \alpha = 1$ zu setzen ist,

$$z = \frac{l}{3} \cdot \frac{3h + 2l}{2h + l},$$

und wenn die obere Rechtecksseite im Wasserspiegel liegt, also $h = 0$ wird, $z = \frac{2}{3} l$ u. s. w.

Fig. 126.



Aufgabe 2. Man soll die Dicke einer Mauer bestimmen, deren Verticaldurchschnitt das Rechteck $ABCD$ Fig. 126 bildet, damit durch den Druck des bis zur Krone BC derselben stehenden Wassers ein Umkanten um ihre äußere untere Kante D nicht erfolgen kann.

Auflösung. Es sei die Höhe der Mauer $AB = CD = h$, ihre unbekannte Dicke $AD = BC = x$, ihre Länge $= 1$, und das Gewicht der Cubikeinheit Mauerwerk $= p$. Das Gesamtgewicht pxh der Mauer wirkt im Schwerpunkte S derselben vertical abwärts, und dessen Moment auf die Kante D bezogen, wird sein:

$$pxh \cdot ED = \frac{1}{2} px^2 h.$$

Der Wasserdruck gegen die Fläche AB ist ferner $\frac{\gamma h^2}{2}$, der Hebelarm, an welchem derselbe wirkt, nach den

Ergebnissen der vorigen Aufgabe, $AF = \frac{1}{3} h$, folglich das statische Moment des Wasserdruckes: $\frac{\gamma h^3}{6}$. Für das Gleich-

gewicht wird daher zu setzen sein, wenn man die Verbindung der Mauer mit der Sohle, worauf sie steht, außer Acht läßt,

$$\frac{1}{2} px^2 h = \frac{\gamma h^3}{6}, \text{ woraus}$$

$$x = h \sqrt{\frac{1}{3} \frac{\gamma}{p}} \text{ folgt.}$$

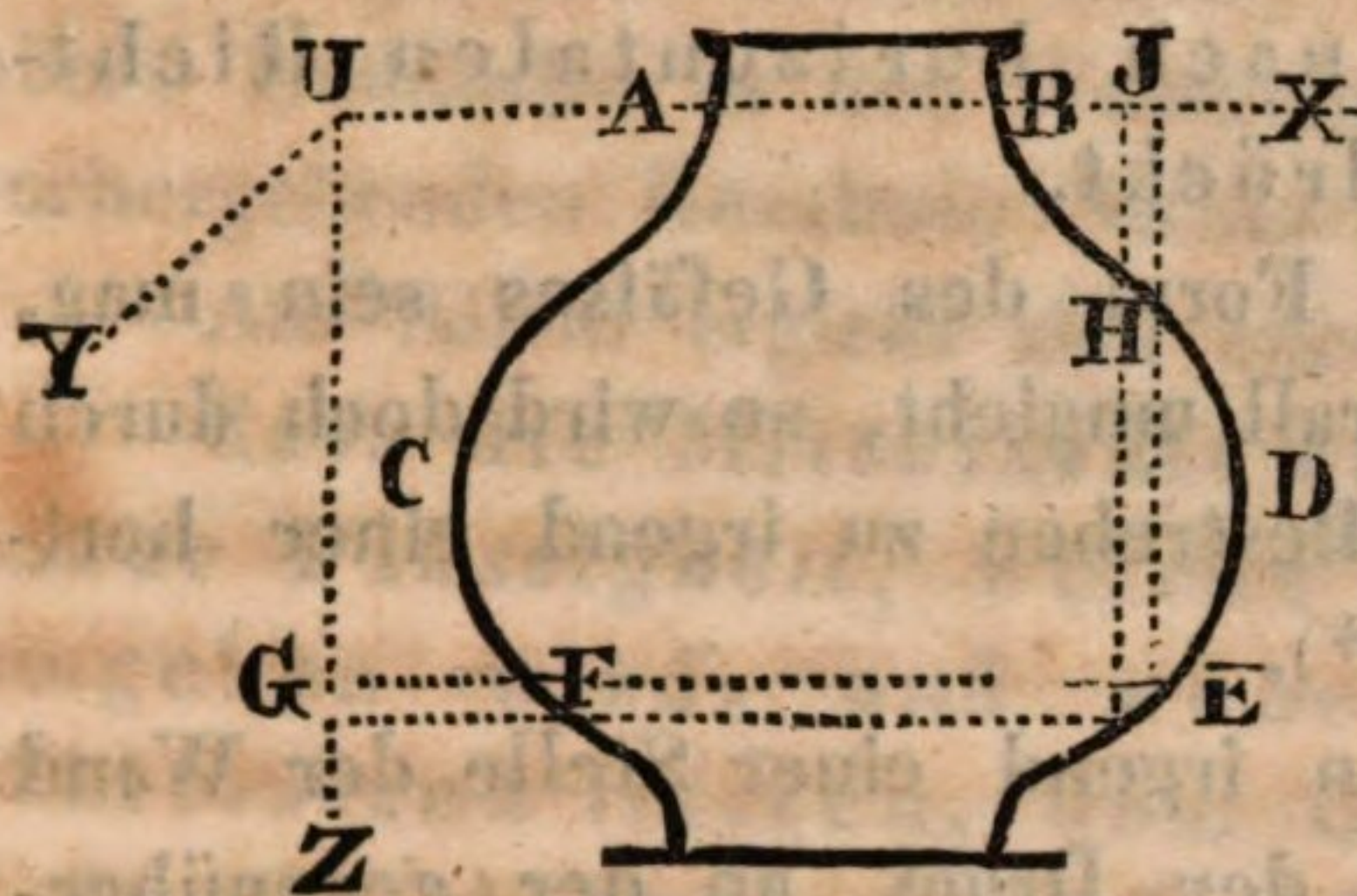
Unter der zulässigen Voraussetzung, daß $p = 2\gamma$ ist, erhält man daher $x = 0,4h$, wofür man der Sicherheit wegen $x = \frac{1}{2} h$ setzen wird.

Die Mauer ist also halb so dick zu machen, als die Höhe des vor derselben stehenden Wassers beträgt.

§. 199.

Mittelkraft aus den Druckkräften, wenn die gedrückte Fläche die Flüssigkeit von allen Seiten umgiebt.

Fig. 127.



Es sei $ABCD$ Fig. 127 ein ganz beliebig gestaltetes Gefäß, welches bis AB mit Wasser gefüllt ist. E sei ein Element der Wandfläche, ω der Flächeninhalt desselben, und die zugehörige Druckhöhe $JE = z$. Der Normaldruck gegen dieses Element werde wie in §. 195 und 197 in Seitenkräfte zerlegt, welche den drei Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystems parallel sind, und wovon die UX und UY Fig. 127 in der Ebene des Wasserspiegels liegen mögen, UZ also mit der Schwerkraftsrichtung zusammenfällt. Bezeichnet man sodann die Projection des Elementes ω gegen die Ebenen YZ , XZ und XY mit a , b und c , so erhält man, nach §. 193, für die horizontalen Seitenkräfte γaz und γbz , für die verticalen γcz .

Um nun zunächst die Mittelkraft der Horizontalkräfte anzugeben, werde das horizontale Prisma GE betrachtet, welches das Element E auf die Ebene YZ projectirt. Dasselbe schneidet auf der Gefäßwand bei F nothwendig ein Element ab, dessen Projection auf die Ebene YZ dieselbe Gröfse wie die Projection des Elementes E , auch dieselbe Druckhöhe wie letzteres hat, so daß beide Elemente einerlei Druck $= \gamma az$ in horizontaler Richtung nach Ausen erfahren. Die Richtungen dieser beiden Drücke wirken aber in derselben Geraden einander genau entgegen, heben sich daher völlig auf und tragen Nichts zur Bildung

Um nun zunächst die Mittelkraft der Horizontalkräfte anzugeben, werde das horizontale Prisma GE betrachtet, welches das Element E auf die Ebene YZ projectirt. Dasselbe schneidet auf der Gefäßwand bei F nothwendig ein Element ab, dessen Projection auf die Ebene YZ dieselbe Gröfse wie die Projection des Elementes E , auch dieselbe Druckhöhe wie letzteres hat, so daß beide Elemente einerlei Druck $= \gamma az$ in horizontaler Richtung nach Ausen erfahren. Die Richtungen dieser beiden Drücke wirken aber in derselben Geraden einander genau entgegen, heben sich daher völlig auf und tragen Nichts zur Bildung

der respectiven Mittelkraft bei. Leicht erkennt man aber, daß dasselbe nicht nur von allen übrigen Drücken, die UX parallel gerichtet sind, nachgewiesen werden kann, sondern auch von jenen, welche UY parallel sind. Ueberhaupt folgt daher der Satz:

Alle Drücke, welche das Wasser auf die verschiedenen Theile der Seitenwand eines Gefäßes nach horizontalen Richtungen ausübt, heben sich gegenseitig auf, oder das ganze Gefäß wird vom Wasser nach horizontalen Richtungen gleich stark gedrückt.

Wie daher auch die Form des Gefäßes sein mag, welches die Flüssigkeit überall umgiebt, so wird doch durch letztere dem Gefäße kein Bestreben zu irgend einer horizontalen Bewegung ertheilt *).

Bringt man dagegen an irgend einer Stelle der Wand eine Oeffnung an, so wird der Druck an der gegenüberliegenden Stelle nicht mehr aufgehoben, und das Gefäß wird sich bestreben, eine horizontal gerichtete Bewegung anzunehmen. Hierauf beruht unter Anderem die Wirkung einer besonderen Art von Wasserrädern, die man deshalb Reactionsräder genannt hat.

Zur Bestimmung der fraglichen Mittelkraft bleiben daher die verticalen Seitenkräfte allein übrig. Hierzu werde das verticale Prisma EHI betrachtet, welches das Element E auf die Ebene XY projicirt. Dasselbe schneidet auf der Gefäßwand, oberhalb, ein zweites Element H ab, welches auf XY gleiche Projection wie E , aber nicht dieselbe Druckhöhe hat. Bezeichnet man letztere, d. i. HJ , mit z' , so ist der vertical aufwärts gerichtete Druck gegen

*) Alle diese Sätze gelten natürlich nur für die Voraussetzung, daß die Gefäßwände weder beweglich, noch ausdehnbar sind, vielmehr ihre Festigkeit ausreicht, die Horizontaldrücke aufzuheben. In Betreff des Gleichgewichtes flüssiger Körper in biegsamen Gefäßen müssen wir auf das vorher citirte Werk Mosely's Art. 55, ferner auf Bossut's Hydrodynamik, übersetzt von Langsdorf, Frankfurt a. M. 1792, Bd. 1, S. 51 u. s. w. verweisen.

das Element $H = \gamma cz'$. Diesem Drucke wirkt aber der gegen E , d. i. γcz , genau entgegen, so dafs wegen $z > z'$, als verticale Seitenkraft für die zu bildende Mittelkraft: $\gamma c (z - z')$, d. i., das Gewicht eines Wasserprismas verbleibt, welches c zur Grundfläche und $z - z'$ zur Höhe hat. Ueberhaupt wird also hiernach die zu suchende Mittelkraft aus der Summe der Gewichte so vieler ähnlicher Prismen wie EH bestehen, als man solche innerhalb des Gefäßes gebildet denken kann; diejenigen Prismen, deren obere Endfläche in den Wasserspiegel fällt, können an dem vorhergehenden Resultate Nichts ändern.

Aus Allem ergibt sich aber,

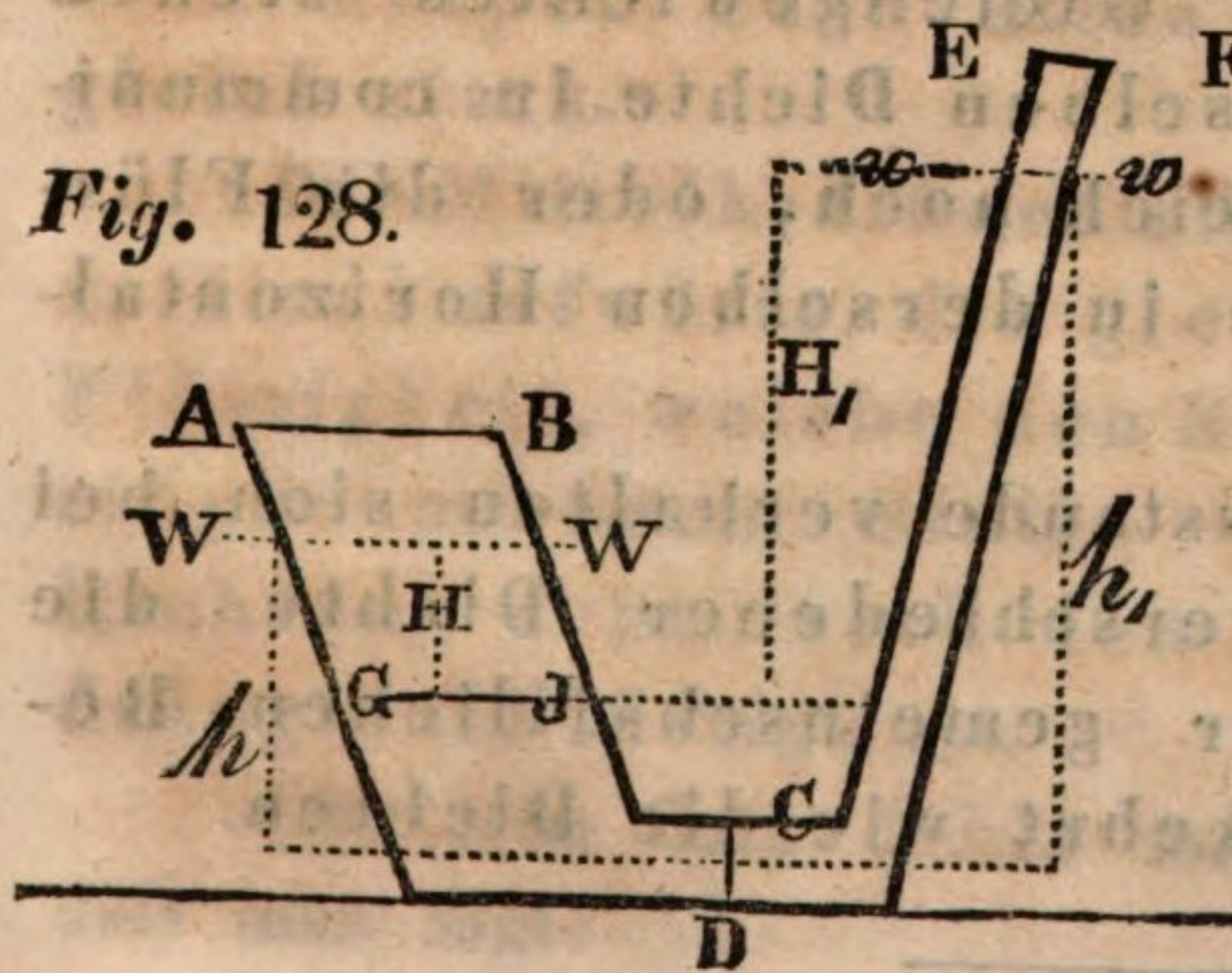
dafs die Mittelkraft aus allen Druckkräften einer Flüssigkeit, welche vom Gefäfse überall umgeben wird, und wobei letztere gehörigen Widerstand leisten, dem Gewichte der Flüssigkeit gleich ist; oder die Kraft, womit ein Gefäß vom darin befindlichen Wasser vertical abwärts getrieben wird, ist dem Gewichte des darin enthaltenen Wassers gleich.

Da man alle Seitenkräfte, die zur Bildung dieser Mittelkraft beitragen, unmittelbar als Gewichte betrachten kann, so mufs die Richtung der Mittelkraft durch den Schwerpunkt des flüssigen Körpers gehen.

§. 200.

Stand flüssiger Körper in communicirenden Gefäfsen.

Fig. 128.



Es sei $ABCDEF$ Fig. 128 ein beliebig gestaltetes communicirendes Gefäß (§. 184), welches wir vorerst mit einer gleichartigen Flüssigkeit von der Dichte $= p$ gefüllt annehmen wollen. Die Flüssigkeitsspiegel in den beiden Schenkeln mö-

gen durch WW und ww angedeutet sein. Denken wir uns nun in der Flüssigkeit eine unendlich dünne Schicht CD vom Inhalte $= a$ und setzen deren respective Druckhöhen h und h' , so ist der Druck, den diese Schicht in der einen Richtung erfährt, $= \gamma ah$, in der anderen, der ersten genau entgegengesetzten Richtung $= \gamma ah'$. Für den Zustand des Gleichgewichtes muß aber nach §. 182 die Schicht CD von beiden Seiten gleichen Druck erfahren, was jedoch nur möglich sein wird, wenn $h = h'$ ist.

Befinden sich in dem Gefäße ungleich dichte Flüssigkeiten, die keine chemische Mischung mit einander eingehen, z. B. im Raume $WGJW$ eine Flüssigkeit, deren Dichte $= p$, in dem $wCGDw$ eine andere von der Dichte $= p_1$, ist ferner GJ die Berührungsfläche beider Flüssigkeiten, und bezeichnen H und H_1 die respectiven Druckhöhen für diese Fläche, deren Inhalt $= A$ sein mag, so sind die Drücke, welche letztere nach genau entgegengesetzten Richtungen erfährt, pAH und p_1AH_1 . Für das Gleichgewicht müssen aber letztere gleich groß sein, d. h., es muß $pH = p_1H_1$ sein, oder es muß sich verhalten: $H : H_1 = p_1 : p$.

Leicht erkennt man aber, daß sich diese Beweise für jede beliebige Form und Zahl von Schenkeln oder Röhren des communicirenden Gefäßes ausdehnen lassen, sowie auch, wenn mehr als zwei Flüssigkeiten von verschiedener Dichte im Gefäße vorkommen. Allgemein ergeben sich daher die Sätze:

Im Zustande des Gleichgewichtes stehen Flüssigkeiten von derselben Dichte in communicirenden Gefäßen gleich hoch, oder die Flüssigkeitsspiegel liegen in derselben Horizontalebene.

In demselben Zustande verhalten sich bei Flüssigkeiten von verschiedener Dichte die Druckhöhen über der gemeinschaftlichen Berührungsfläche umgekehrt wie die Dichten.

Drittes Kapitel.

Gleichgewicht des Wassers mit eingetauchten festen Körpern.

§. 201.

Druck des Wassers gegen eingetauchte Körper.

Aus einer einfachen Betrachtung wird zu entnehmen sein, daß sich der Druck, welchen ein in eine Flüssigkeit getauchter fester (freier) Körper überhaupt erfährt, ganz auf dieselbe Weise auffinden lassen muß, wie in §. 199 der Druck gegen eine die Flüssigkeit überall umgebende Fläche.

Die hier nach entsprechender Zerlegung erhaltenen Seitenkräfte unterscheiden sich von den an gedachtem Orte nur durch die relativen Zeichen, indem jetzt die Horizontalkräfte von Außen nach Innen gerichtet, die Verticalkräfte gegen die oberen (dem Wasserspiegel zugekehrten) Elemente abwärts und die Verticalkräfte gegen die unteren (entgegengesetzten) Elemente aufwärts gerichtet sind.

Verfährt man sodann wie in gedachtem §., so ergeben sich für jeden ganz oder zum Theil in eine Flüssigkeit getauchten Körper leicht folgende Sätze:

Die horizontalen Druckkräfte heben sich auf, oder die ruhige Flüssigkeit drückt den festen Körper nach allen Horizontalrichtungen gleich stark.

Die Mittelkraft aus allen Druckkräften wirkt vertical aufwärts, ist gleich dem Gewichte der Flüssigkeit, welche den Körper aus der von ihm eingenommenen Stelle verdrängt, und ihre Richtung geht durch den Schwerpunct der verdrängten Flüssigkeit.

Letzteren Satz drückt man gewöhnlich auch so aus, daß man sagt:

„Ein in eine Flüssigkeit eingetauchter Körper verliert so viel an seinem Gewichte, als das Gewicht der von ihm verdrängten Flüssigkeit beträgt.“

Den vertical aufwärts gerichteten Druck der Mittelfkraft nennt man den hydrostatischen Auftrieb. Vorstehendes gilt übrigens sowohl für gleich dichte Flüssigkeiten, als auch für solche, welche aus horizontalen Schichten von verschiedener Dichte bestehen.

Von diesen Sätzen macht man unter Anderem eine besondere Anwendung bei der Bestimmung der specifischen (eigenthümlichen) Gewichte der Körper, was jedoch später folgenden §§. aufbehalten bleiben mag. Hier werde nur festgestellt, daß wir unter specifischem Gewichte die (unbenannte) Zahl verstehen wollen, welche angiebt, wie viel Mal ein Körper mehr wiegt, als eine Masse Wasser, welche mit ihm gleiches Volumen hat.

Anmerkung. Die Beziehung zwischen specifischem Gewichte und Dichte eines Körpers, mag letzteres wie im Vorhergehenden das Gewicht der Volumeneinheit ausdrücken oder die Bedeutung von §. 26 haben, ist jedenfalls leicht nachzuweisen.

§. 202.

Nach dem Vorstehenden läßt sich angeben, ob ein ganz unter das Wasser getauchter Körper an einer ihm gegebenen Stelle fortdauernd verbleiben, ob er untersinken oder sich ganz oder zum Theil über den Wasserspiegel erheben wird. Dem hydrostatischen Auftriebe wirkt nämlich das in allen Fällen gleichbleibende Gewicht des Körpers selbst entgegen. Ist daher das Gewicht des Körpers eben so groß, als das der von ihm verdrängten Flüssigkeit, so wird er weder ein Bestreben zum Sinken, noch zum Steigen zeigen. Ist das Gewicht des Körpers größer, so wird er in der Flüssigkeit untersinken. Beträgt aber das Gewicht des Körpers weniger, so wird er in die Höhe steigen, und zwar so lange, bis nur noch ein solcher Theil desselben in die Flüssigkeit taucht, daß das Gewicht des ganzen Körpers dem Gewichte der Wassermasse gleich ist,

die er sodann noch verdrängt. In letzterem Falle sagt man von dem Körper, daß er schwimme.

Durch Formeln läßt sich das hier Gesagte noch folgendermaßen ausdrücken.

Es sei V das Volumen, D die Dichte eines festen Körpers, v das Volumen seines eingetauchten Theiles, wenn er in einer Flüssigkeit schwimmt, deren Dichte $= d$ ist. Sodann ist für das Gleichgewicht (jede Drehung als unmöglich vorausgesetzt):

$$(1) \quad DV = dv^*).$$

Ist nun der Körper völlig eingetaucht, also $V = v$, so folgt $D = d$. Für eine theilweise Eintauchung, wo $V > v$, wird $D < d$ erfordert u. s. w.

§. 203.

Vollständiges Gleichgewicht schwimmender Körper.

Damit sich ein auf einer ruhigen Flüssigkeit schwimmender Körper vollständig im Gleichgewicht befinde, ist, außer der Bedingung, daß das Gewicht des Körpers dem der verdrängten Flüssigkeit gleich sei, noch eine andere zu erfüllen nöthig, nämlich die, daß der Schwerpunkt des schwimmenden Körpers mit dem Schwerpunkte der verdrängten Flüssigkeit in derselben Verticallinie liege. Denn ist auch der ersten Bedingung Genüge geleistet, so kann sich der Körper immer noch beliebig auf der Stelle drehen. Soll aber Letzteres nicht eintreten, so müssen die beiden hier einander entgegenwirkenden parallelen Kräfte nicht nur gleich sein, sondern es muß die eine die Wirkung der anderen völlig vernichten, was jedoch nur möglich ist, wenn ihre Richtungslinien zusammenfallen. Ist sowohl der schwimmende Körper als die Flüssigkeit gleichartig, so liegt der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit mit dem des eingetauchten Körpertheiles in einem und demselben Punkte.

*) Bei nicht gleichdichten Körpern hat man unter V die mittlere Dichte zu verstehen.

Die Verbindungslinie beider vorgenannten Schwerpunkte nennt man die Schwimmaxe, die horizontale Oberfläche der Flüssigkeit, in welcher der Körper schwimmt, die Schwimmebene. Man sagt, der Körper schwimmt in aufrechter Stellung, wenn es wenigstens eine durch seine Schwimmaxe zu legende (verticale) Ebene giebt, die den Körper in zwei symmetrische Theile theilt; im entgegengesetzten Falle sagt man, der Körper schwimmt in schiefer Stellung. Ferner sagt man, ein Körper schwimme mit Stabilität oder im steten Gleichgewichte, wenn er, aus seiner Gleichgewichtslage gebracht, von selbst ein Bestreben besitzt, in diese Lage wieder zurückzukehren; mit Instabilität im unsteten Gleichgewichte, wenn er sich, statt, wie bemerkt, zurückzukehren, immer mehr von der ersten Lage entfernt; endlich ohne Stabilität, wenn er, aus seiner ursprünglichen Lage gebracht, gar kein Bestreben zu irgend einer Bewegung zeigt.

Aus diesem Allen erwachsen nothwendig wichtige Fragen, die in den folgenden §§. entsprechende Beantwortung erfahren werden.

§. 204.

Tiefe der Einsenkung schwimmender (symmetrischer) Körper.

Ist der schwimmende Körper in Bezug auf irgend eine durch ihn gelegte Axe symmetrisch, d. h. ist er so gestaltet, daß für jede Ebene, welche durch ihn rechtwinkelig zu gedachter Axe geführt wird, der Schwerpunkt der Schnittfläche in dieser Axe liegt, und senkt man ihn so in die Flüssigkeit, daß bemerkte Axe vertical gerichtet ist, so wird der Schwerpunkt des ganzen Körpers und der seines eingetauchten Theiles in dieser Axe liegen, und die zweite Bedingung des Gleichgewichtes wird von selbst erfüllt sein, wie tief auch der Körper eintauchen mag. Die Gröfse der Eintauchungstiefe wird sodann aus einer Gleichung zu reduciren sein, welche der ersten Gleichgewichtsbedingung entsprechend gebildet ist.

Eine wichtige technische Anwendung findet dieser Satz bei Berechnung der Eintauchungstiefe hohler Gefäße, namentlich der Schiffe, bei Verfertigung sogenannter Aichscalen, bei Bestimmung der Ladungsgröße für letztere u. d. m.

Aufgabe. Man soll die Tiefe der Einsenkung eines Schiffes bestimmen, dessen isometrische Projection Fig. 129 darstellt.

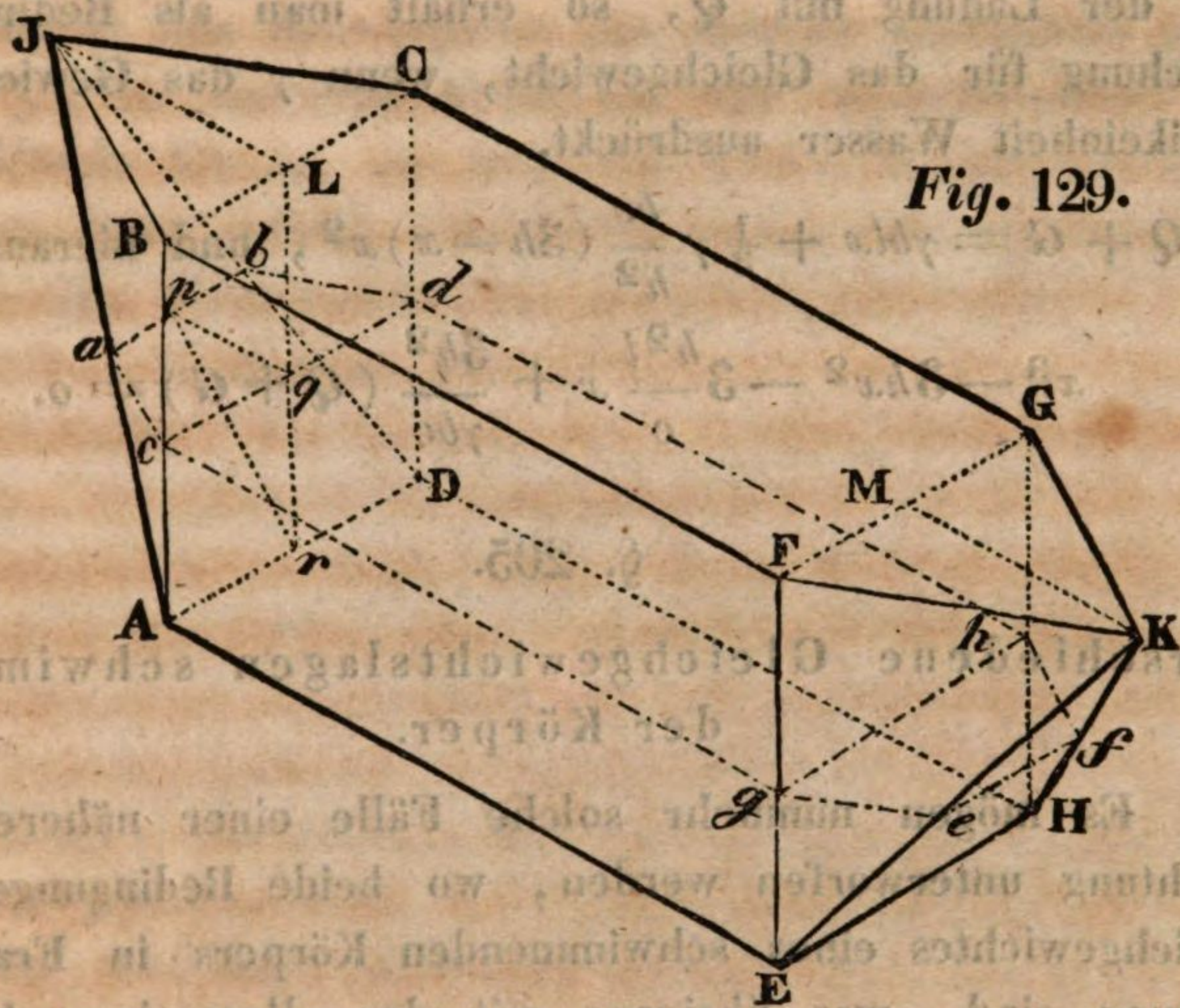


Fig. 129.

Auflösung. Das Mittelstück $ACEG$ bilde ein gerades Parallelepipedum, wovon die Länge $AE = BG = CG = l$, die Breite $AD = BC = EH = b$, die Tiefe $AB = CD = EF = h$ sein mag. Jeder der beiden gleichen Schnäbel bilde eine vierseitige Pyramide mit rectangulärer Basis, die Länge $JL = KM$ jedes Schnabels sei $= c$. Die punctirten Linien $acgefhdba$ mögen die Durchschnitsfläche des Schiffes mit der Schwimmebene bezeichnen, die Eintauchungstiefe $cA = dD = gE = hH$ werde $= x$ gesetzt. Der Cubikinhalt des eingetauchten Theiles vom Mittelstücke ist hiernach $= xbl$. Die eingetauchten Theile der Schnäbel bilden schief abgeschnittene dreiseitige Prismen $abcd AD$

und $efghEH$, wovon immer eine der parallelen Seiten, nämlich ab und ef , $= \frac{b}{h}(h-x)$, jede der beiden anderen $= b$, der normale Querschnitt $pqr = \frac{1}{2} \frac{c}{h} \cdot x^2$,

mithin der Cubikinhalt beider zusammen $= \frac{1}{3} \frac{bc}{h^2}(3h-x)x^2$ ist *).

Bezeichnet man nun das Gewicht des Schiffes mit G , das der Ladung mit Q , so erhält man als Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht, wenn γ das Gewicht der Cubikeinheit Wasser ausdrückt,

$$Q + G = \gamma b l x + \frac{1}{3} \gamma \frac{bc}{h^2} (3h-x)x^2, \text{ und hieraus}$$

$$x^3 - 3hx^2 - 3\frac{h^2 l}{c} x + \frac{3h^2}{\gamma bc} (Q + G) = 0.$$

§. 205.

Verschiedene Gleichgewichtslagen schwimmender Körper.

Es mögen nunmehr solche Fälle einer näheren Betrachtung unterworfen werden, wo beide Bedingungen des Gleichgewichtes eines schwimmenden Körpers in Frage zu nehmen sind, was übrigens mit der allgemeinen Aufgabe zusammenfällt, die verschiedenen Stellungen oder Lagen eines im Gleichgewicht schwimmenden Körpers zu bestimmen.

*) Es muß sich nämlich verhalten $BC : ab = AB : Bc$, d. i. $b : ab = h : h-x$ und $ab = \frac{b}{p}(h-x)$; ferner ist $\triangle pqr = \frac{pq \cdot qr}{2}$, sowie $JL : Lr = pq : qr$, oder $c : h = pq : x$, mithin $\triangle pqr = \frac{cx \cdot x}{2h} = \frac{cx^2}{2h}$. Der Cubikinhalt eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas wird aber gefunden, wenn man das arithmetische Mittel der drei parallelen Längenkanten mit dem normalen Querschnitte multipliziert, daher für jedes Prisma unsere Bezeichnung

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{cx^2}{2h} \left\{ 2b + \frac{b}{h}(h-x) \right\} = \frac{1}{6} \frac{bc}{h^2} (3h-x)x^2.$$

Wir setzen hierzu wieder voraus, daß sowohl der Körper, als die Flüssigkeit, in welcher derselbe schwimmt, gleichförmig dicht sei.

Die erste Gleichgewichtsbedingung wird sodann einfach durch die Gleichung 1, §. 202 ausgedrückt. Hinsichtlich der zweiten werde zuvörderst bemerkt, daß nach den Sätzen vom Schwerpunkte die gerade Linie, welche den Schwerpunkt eines Körpers und den eines Abschnittes desselben, der durch eine Ebene gebildet ist, verbindet, auch durch den Schwerpunkt des anderen Abschnittes gehen muß *). In unserem Falle ist die Schwimmebene die schneidende Ebene, so daß die zweite Gleichgewichtsbedingung dann erfüllt sein wird, wenn die gerade Linie, welche den Schwerpunkt des ganzen Körpers mit dem des gebildeten Abschnittes verbindet, auf der Schwimmebene vertical steht. Ueberhaupt gestaltet sich hiernach die ganze Aufgabe zu einer rein geometrischen, die sich wie folgt ausdrücken läßt: „Ein Körper ist durch eine Ebene so zu schneiden, daß das Volumen eines Abschnittes zu dem des ganzen Körpers in einem gegebenen (durch das specifische Gewicht bedingten) Verhältnisse steht, und daß sich die Schwerpunkte von Abschnitt und Körper in derselben auf der Schnittebene verticalen Linie befinden.“

In jedem einzelnen Falle bestimmen die Wurzeln der Gleichungen, welche diese beiden Bedingungen ausdrücken, die verschiedenen Gleichgewichtslagen des betreffenden schwimmenden Körpers. Bei manchen Körpern ist die Zahl dieser Lagen unbegrenzt, wovon ein gleich dichter, gerader Cylinder, der mit horizontal liegender Axe schwimmt, ein Beispiel ist.

§. 206.

Zur Erläuterung des Vorstehenden wählen wir, als

*) Die Verbindungslinie der Schwerpunkte beider Abschnitte ist nämlich nothwendig eine Schwerlinie für den ganzen Körper u. s. w.

einfachen Fall, ein dreiseitiges, gerades und gleich dichtes Prisma, dessen specifisches Gewicht $= s < 1$ sein mag. Vorerst ist klar, daß sich das Prisma sowohl bei verticaler als horizontaler Lage seiner Axe im Gleichgewicht befinden

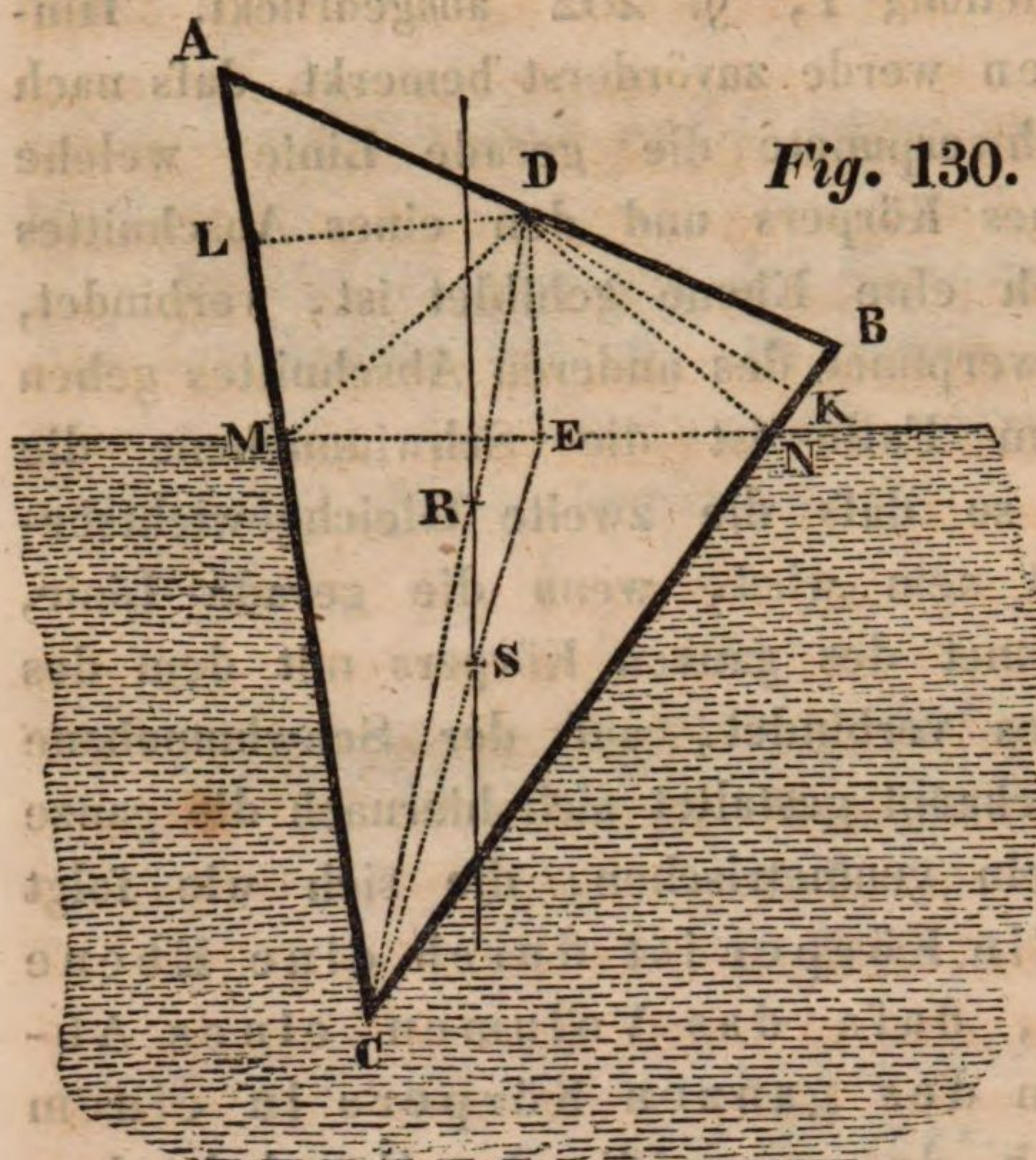


Fig. 130.

kann. Der erste Fall bedarf keiner Auseinandersetzung, vielmehr folgt aus der Natur der Sache, daß es hierbei zwei Gleichgewichtslagen geben muß. Im zweiten Falle hat man nur nöthig, die verschiedenen Lagen der zur Axe des Prisma's normalen Durchschnitsfigur zu betrachten, da zufolge der Voraussetzungen die Länge desselben außer Acht bleiben kann.

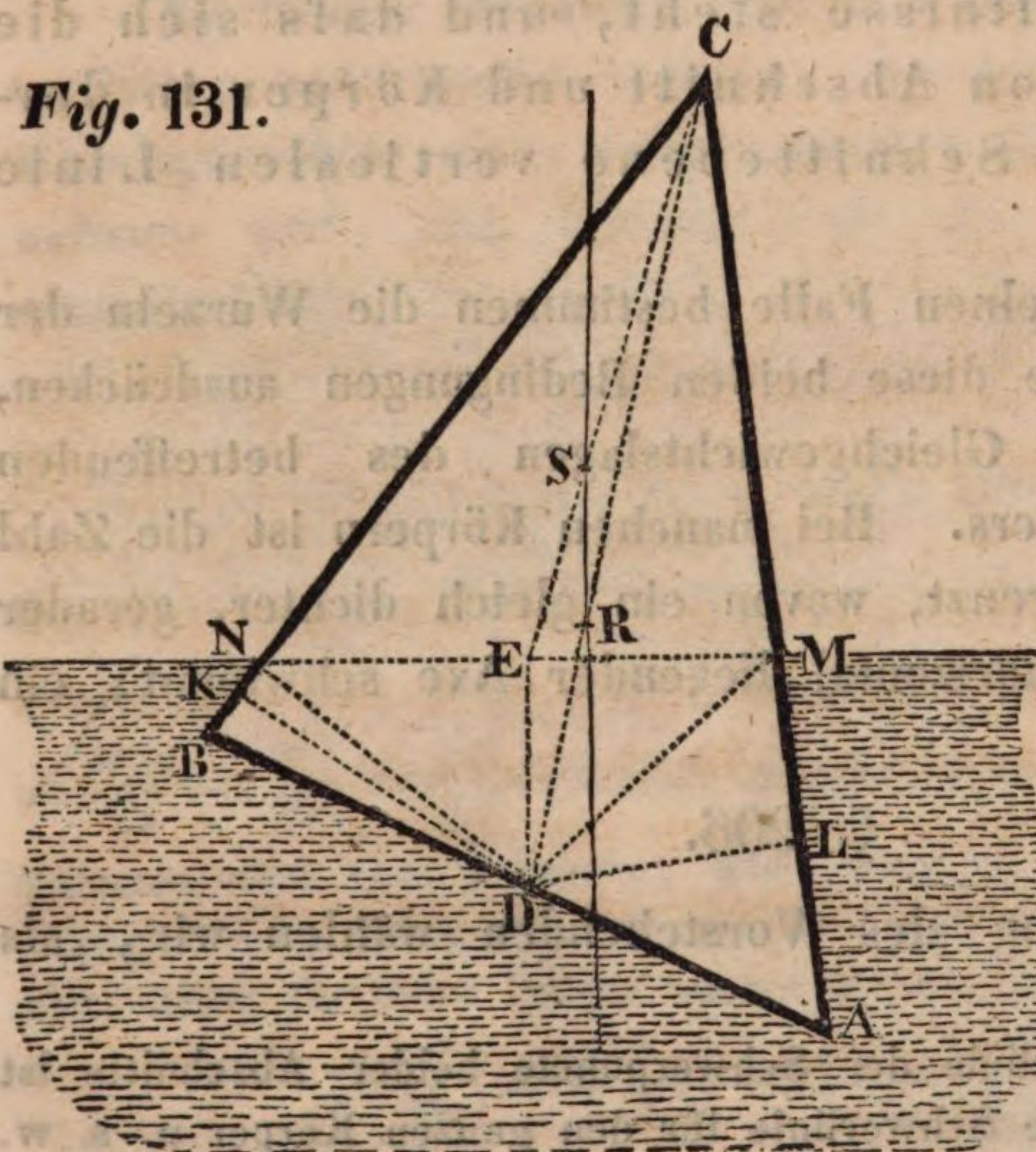


Fig. 131.

Hierbei ist so- dann zu unterscheiden, ob, wie in Fig. 130, nur ein Winkel der Seitenflächen eintaucht, oder, wie in Fig. 131, zwei dieser Winkel. Das Rechnungsverfahren ist für beide Fälle dasselbe, weshalb wir solche

zusammenfassen. Ist nun MN die Linie, in welcher die Schwimmebene die Ebene des Dreiecks schneidet, so wird die ganze Aufgabe gelöst sein, wenn man die Länge der Linien MC und NC kennt. Hierzu sei $AC = a$, $BC = b$, CD , als Schwerlinie des Dreiecks ABC , $= c$; ferner $\angle ACD = \alpha$, $\angle DCB = \beta$ und $MC = x$, $NC = y$.

Die Gleichgewichtsbedingung erfordert

(1) $s. ABC = MNC$ im Falle von Fig. 130;

(2) $s. ABC = BNMA$ - - - - - 131.

Es ist aber $\triangle ABC = \frac{1}{2}ab \sin. (\alpha + \beta)$, $\triangle MNC = \frac{1}{2}xy \sin. (\alpha + \beta)$, Trapez $BNMA = \frac{1}{2}(ab - xy) \sin. (\alpha + \beta)$, demnach aus (1) und (2)

(3) $s. ab = xy$, und (4) $ab(1 - s) = xy$.

In Bezug auf die zweite Gleichgewichtsbedingung muß, wenn R und S respective die Schwerpunkte der Dreiecke ABC und MNC sind, die Gerade RS vertical gerichtet sein. Zieht man ferner die Schwerlinie EC , verbindet D mit E , M und N und fällt aus D die DL normal auf AC , DK normal auf BC , so läßt sich leicht zeigen, daß RS nur dann vertical sein kann, wenn die ihr parallele Linie DE rechtwinkelig auf MN steht, mithin, wegen $ME = NE$ (§. 30), auch $MD = ND$ ist. Aus letzterer Gleichung ergibt sich aber $\overline{LD}^2 + \overline{LM}^2 = \overline{DK}^2 + \overline{NK}^2$, d. i. nach unserer Bezeichnung $c^2 \sin. \alpha^2 + (c \cos. \alpha - x)^2 = c^2 \sin. \beta^2 + (c \cos. \beta - y)^2$, oder nach gehöriger Reduction

$$(5) \quad x^2 - 2cx \cos. \alpha = y^2 - 2cy \cos. \beta.$$

Diese Gleichung paßt zugleich auf den Fall Fig. 131, wenn man nur beachtet, daß sodann S der Schwerpunkt des nicht eingetauchten Dreiecks CMN ist, der Schwerpunkt des eingetauchten Theiles $ABMN$ aber nach §. 205 immer noch in der Linie RS liegen muß.

Eliminirt man daher aus (5) mit Zuziehung von (3) und (4) die Größe y , so folgt nach entsprechendem Ordnen der Glieder

$$\text{I.} \quad x^4 - 2c \cos. \alpha. x^3 + 2abc \cos. \beta. x - a^2 b^2 s^2 = 0,$$

für Fig. 130;

$$\text{II. } x^4 - 2c \cos. \alpha. x^3 + 2abc (1-s) \cos. \beta. x - a^2 b^2 (1-s)^2 = 0, \text{ für Fig. 131.}$$

Da diese Gleichungen von geradem Grade sind und das letzte Glied negativ erscheint, so folgt vorerst, daß jede derselben zwei reelle Wurzeln hat, wovon die eine positiv, die andere negativ ist.

Letzterer Werth ist aber unbrauchbar, weil aus der Natur der Sache erhellt, daß x nicht auf die Verlängerung von AC , über C hinaus, getragen werden kann. Setzt man dagegen alle vier Wurzeln als reell voraus, so folgt aus der Beschaffenheit der Zeichen, daß drei positive und eine negative Wurzel vorhanden sind. Nach der Bestimmung von x ergeben sich die Werthe für y aus (3) und (4). Zu beachten ist endlich, daß $x < a$, $y < b$ sein muß. Für jeden der Fälle Fig. 130 und 131, daß sich nämlich C entweder allein unter oder allein außer dem Wasser befindet, giebt es also höchstens drei Lagen des Gleichgewichtes. Ueberhaupt kann demnach die Zahl der Lagen oder Stellungen, in welchen ein gerades, dreiseitiges Prisma mit horizontal gelegter Axe im Gleichgewichte schwimmt, nie mehr als 18 betragen.

Bildet die Querschnittsfläche des Prismas ein gleichschenkliges, gleichseitiges oder rechtwinkliges Dreieck, so ist es zur Bestimmung von x und y vortheilhafter, direct die Gleichung 3, 4 und 5 zu benutzen. Als Beispiel letzterer Art, und um zugleich über die geraden und schiefen Lagen oder Stellungen, in welchen ein solches schwimmt, nähere Auskunft zu erhalten, nehmen wir an, daß die Querschnitte Fig. 130 und 131 gleichseitige Dreiecke bilden. Sodann wird in unsern Formeln $a = b$, $\alpha = \beta = 30^\circ$; $\cos. \alpha = \cos 30 = \frac{1}{2} \sqrt{3}$; $c = a \cos. \alpha = \frac{a \sqrt{3}}{2}$ zu setzen sein, wornach aus 3, 4 und 5 folgt

$$(6) a^2 s = x^2 = y^2; (7) a^2 (1-s) = x^2 = y^2;$$

$$(8) y^2 - x^2 - \frac{3}{2} a (y-x) = 0.$$

Da der Gleichung (8) für $x = y$ Genüge geleistet wird, so folgt aus (6) $x = y = a\sqrt{s}$, für Fig. 130 und aus (7) $x = y = a\sqrt{1-s}$, für Fig. 131, überhaupt also $CM = CN$.

Hiernach ist die erste Gleichgewichtslage von der Art, daß der Körper in gerader Stellung schwimmt.

Zur Beurtheilung der übrigen Lagen giebt die Gleichung (8) noch $y + x = \frac{3}{2}a$, und in Verbindung mit 3

$$\frac{a^2 s}{x} + x = \frac{3}{2}a, \text{ woraus}$$

$$x = a \left\{ \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - s} \right\}, \text{ so wie}$$

$$y = a \left\{ \frac{3}{4} \mp \sqrt{\frac{9}{16} - s} \right\} \text{ folgt.}$$

Diese Werthe von x und y geben die beiden Lagen an, worin das Prisma Fig. 130. in schiefer Stellung schwimmt, welche daher nur möglich sind, wenn $s < \frac{9}{16}$ ist.

Für die beiden schiefen Stellungen von Fig. 131 erhält man, indem im vorstehenden Werthe $1-s$ statt s gesetzt wird,

$$x = a \left\{ \frac{3}{4} \pm \sqrt{s - \frac{7}{16}} \right\},$$

$$y = a \left\{ \frac{3}{4} \mp \sqrt{s - \frac{7}{16}} \right\};$$

welche Gleichungen wieder $s > \frac{7}{16}$ voraussetzen.

§. 207.

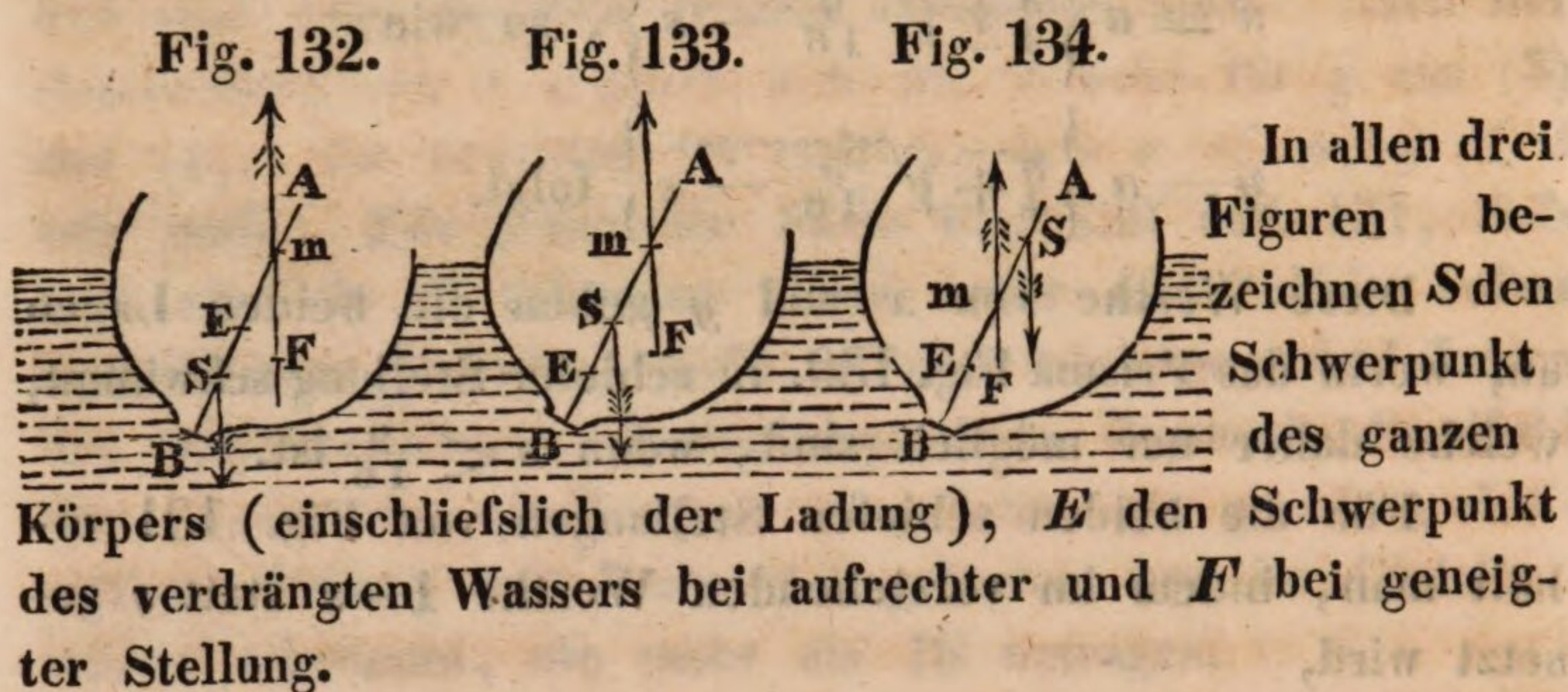
Stabilität schwimmender Körper.

Für die technische Mechanik bei weitem wichtiger als die Sätze der vorigen beiden Paragraphen ist die Angabe der Umstände, unter welchen ein Körper mit Stabilität, Instabilität oder mit völliger Gleichgültigkeit schwimmt.

Hierzu nehmen wir an, daß der im Wasser schwimmende Körper nicht gleichartig ist, vielmehr in seinem In-

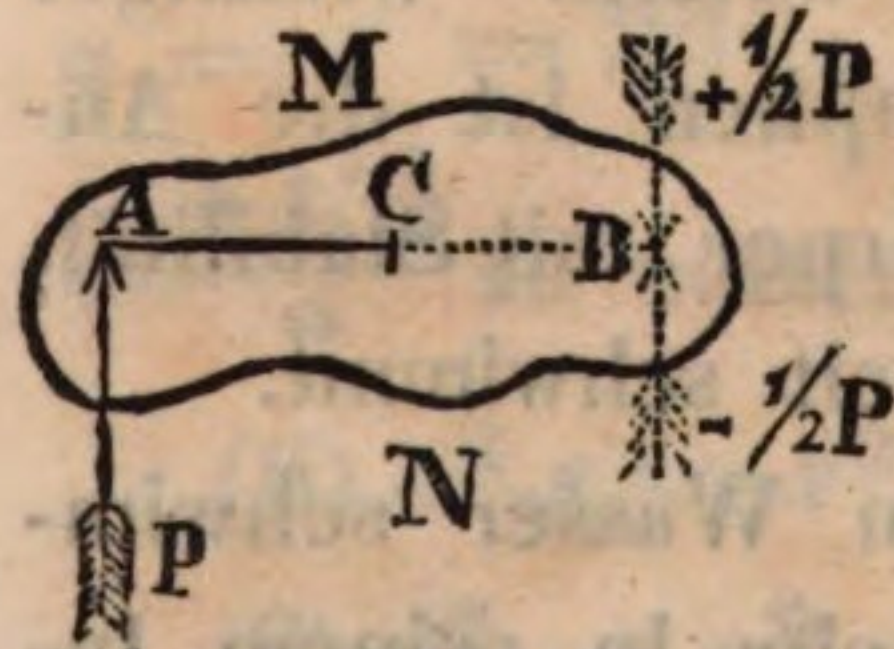
nern eine Substanz (Ladung) enthält, deren Dichte größer als die des Wassers ist, und folglich der Schwerpunkt des eingetauchten Körpertheils nicht mit dem des verdrängten Wassers zusammenfällt.

Fig. 132 bis mit 134 mögen sodann drei schwimmende Körper vorstellen, welche durch irgend eine Kraft aus der ursprünglich aufrechten Gleichgewichtslage in eine neue schiefe Lage gebracht wurden, ohne daß letztere, wie bei den schiefen Stellungen des vorigen §., ein Gleichgewicht an sich zulässt, Auftriebs- und Schwerkrachtsrichtungen also nicht in derselben Vertikale liegen.



Jeder dieser Körper ist sodann der Wirkung zweier Kräfte unterworfen, die ihn veranlassen, zwei verschiedene Bewegungen anzunehmen, nämlich eine fortschreitende, vertikal aufwärts durch den Schwerpunkt S gerichtete, und eine Drehbewegung um eine durch diesen Schwerpunkt gehende horizontale Axe, welche letztere rechtwinklig auf der Vertikalebene steht. *)

*) Für gegenwärtigen Zweck wird es hinreichen, diesen Satz wie nachstehend zu beweisen. Es sei MN ein beliebiger freier Körper, dessen Schwerpunkt sich in C befindet, und auf welchen in A eine Kraft P wirkt, deren Richtung normal zur Verbindungsline AC ist. Man verlängere AC über C hinaus, nehme $CB = AC$ und bringe in B zwei einander entgegengesetzt gerichtete Kräfte $+\frac{1}{2}P$ und $-\frac{1}{2}P$ an,



Die fortschreitende Bewegung des Schwerpunktes kann für die hier folgenden Untersuchungen aufser Acht bleiben, wenn man nur berücksichtigt, dafs bei aufrechter und schiefer oder geneigter Stellung des Körpers, unter sonst einerlei Umständen, stets ganz gleiche Wasservolumen verdrängt werden müssen, was nothwendiger Weise, für die meisten Fälle, eine Veränderung der Drehaxenlage voraussetzt und in die betreffenden Rechnungen mit einführt.

Sodann lässt sich aus der nähern Betrachtung der Figuren unmittelbar entnehmen, dafs, wenn die Lage der Punkte F und S die von 132 und 133 ist, der Körper ein Bestreben besitzt, in seine ursprüngliche Stellung zurückzukehren; dagegen wenn die gedachten Punkte die Lage von Fig. 134 haben, dieses Bestreben darin besteht, den Körper immer mehr von der ersten Stellung zu entfernen, d. h. solchen endlich umzuschlagen.

Verlängert man, zur weiteren Untersuchung, die durch F gehende Auftriebsrichtung, bis solche die vorher vertikale Axe AB des Körpers in einem Punkte m schneidet, so ergiebt sich leicht, dafs der Körper mit Stabilität schwimmt sobald dieser Punkt höher als der Schwerpunct S liegt, dagegen umschlägt, mit Instabilität schwimmt, wenn m unter S liegt, so wie endlich, dafs der Zustand völliger Gleichgültigkeit eintritt, sobald m mit S zusammen-

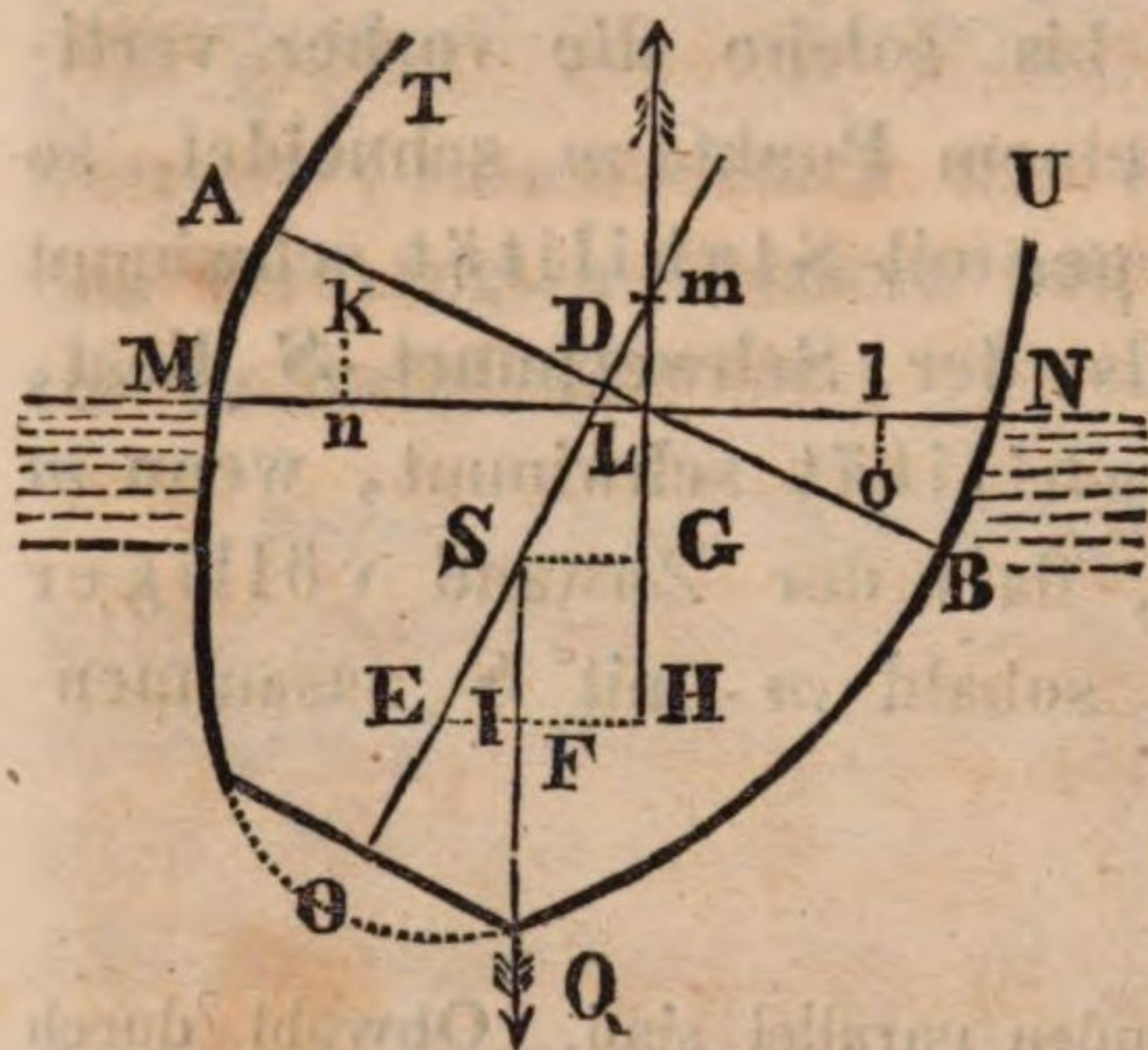
welche überdies der bei A angreifenden parallel sind. Obwohl durch die hinzugebrachten Kräfte in dem Ganzen an sich Nichts geändert wird, so gestatten dieselben doch folgende Schlüsse. Es wird nämlich — $\frac{1}{2} P$ der gleichen Hälfte jener bei A angreifenden Kraft das Gleichgewicht halten, die Mittelkraft beider ihren Richtungen parallel durch C gehen und deren Grösse $\frac{P}{2} + \frac{P}{2} = P$ sein. Durch letztere Kraft erhält aber der Körper das Bestreben, nach der ursprünglichen Richtung von P eine fortschreitende Bewegung anzunehmen. Die beiden, vermöge der Zerlegung noch übrigen Kräfte, nämlich $+\frac{1}{2} P$ bei A und $+\frac{1}{2} P$ bei B , werden dagegen eine gleichzeitige Drehung um den Schwerpunct C veranlassen, gleichsam als wenn letzterer befestigt wäre.

fällt. Gedachten Punct m nennt man das Metacentrum des schwimmenden Körpers.*)

§. 208.

Es mag jetzt gezeigt werden, wie man die Stabilität eines schwimmenden Körpers, für jeden besondern Fall, durch Rechnung zu bestimmen im Stande ist, wobei wir jedoch Formen voraussetzen wie sie beim Schiffsbau vorkommen, d. h. solche Körper, welche beim aufrechten Stande von einer durch die Schwimmebene und Längsaxe gelegten Vertikalebene (Mastenebene) in zwei völlig symmetrische Theile getheilt werden. Außerdem werde vorerst angenommen, es bilden alle Querschnitte des betreffenden Schiffes ähnlich gleiche Figuren, so daß Flächen als mit Volumen gleichgeltend aufgeführt werden können.

Fig. 135.



In Fig. 135 sei TOU das schwimmende Schiff, S dessen Schwerpunkt (einschließlich Ballast und Ladung), AOB das verdrängte Wasservolumen (Déplacement) bei aufrechter Stellung und MNO dasselbe nach der Drehung des Schiffes, um den beliebigen Winkel OSQ , SQ vertikal vorausgesetzt. Bei der ersten Stellung sei E der Schwerpunkt des Déplacements, bei der zweiten liege derselbe in der noch unbestimmten Vertikale FP .

Zieht man nun vom unveränderlichen Schwerpunkte S die Linie SG rechtwinklig gegen die Auftriebsrichtung FP , so erkennt man leicht, daß Alles auf die Bestimmung von SG , als Hebelarm des Auftriebes, ankommen wird, um das Drehungs- oder Stabilitäts-Moment angeben zu können.

*) Von *Μετὰ* jenseits und *Κέντρον* Mittelpunkt.

$$(2) \quad EH = \frac{v}{V} \cdot b$$

Wird nun angenommen, daß der Abstand der Punkte S und E Fig. 135 bekannt und gleich d ist und bezeichnet φ den Neigungswinkel $OSQ = BLN$, so folgt $EJ = ES \sin. \varphi = d \sin. \varphi$. Wird sodann letzterer Werth von (1) abgezogen, so erhält man, weil $JH = SG$,

$$(3) \quad SG = \frac{v}{V} b - d \sin. \varphi.$$

Bezeichnet daher Q das Gewicht des Déplacements oder das des ganzen Schiffes, so ergibt sich das Stabilitätsmoment $= M$, zu

$$I. \quad M = Q \left(\frac{v}{V} b - d \sin. \varphi \right).$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß S über E liegt, findet das umgekehrte Statt, so ist d negativ zu nehmen und man erhält

$$II. \quad M = Q \left(\frac{v}{V} b + d \sin. \varphi \right)$$

Leicht erkennt man, daß der Ausdruck I. weder Null sein, noch einen negativen Werth geben darf, wenn das Schiff aus der geneigten Lage von selbst in die aufrechte zurückkehren soll. Außerdem wird man bemerken, daß, unter sonst gleichen Umständen, das Stabilitätsmoment namentlich von der Gestalt der Seitenwandtheile des Schiffes abhängt, welche zwischen den horizontalen Ebenen liegen, die man sich durch die Punkte A und B gelegt denken kann, oder nach der technischen Sprache, von der Zone, die zwischen Wind und Wasser liegt.

Die Höhe des Metacentrums über E , d. i. Em , ergibt sich endlich mit Hülfe von (2) zu

$$III. \quad Em = \frac{EH}{\sin. \varphi} = \frac{v \cdot b}{V \cdot \sin. \varphi}.$$

Anmerkung. Wird der Neigungswinkel φ als unendlich klein angenommen, so kann (Fig. 135) D mit L als zusammenfallend betrachtet, und, wie auch die Seiten des Schiffes gestaltet sein mögen, können die Flächen AMD und BDN als ähnlich gleiche Dreiecke an-

gesehen werden. Bezeichnet sodann y die halbe veränderliche Breite $AD = BD$ des Schiffes (in der Schwimmebene gemessen) so läßt sich nach §. 30, $b = \frac{4}{3}y$ setzen. Denkt man sich ferner die Längsaxe des Schiffes in sehr kleine Theile vom resp. Abstände gleich e getheilt und durch die Theilpunkte Vertikalebenen gelegt, so folgt für das Volumen eines der so erhaltenen Elementarkörper: $y \cdot \frac{y \sin. \varphi}{2} \cdot e = \frac{y^2 \sin. \varphi \cdot e}{2}$. Bildet man sodann die Produkte aus jedem der letztern Ausdrücke in die respective Gröfse $= \frac{4}{3}y$ und addirt solche, so folgt $vb = \frac{2}{3} \sin. \varphi \Sigma (y^3 e)$ und hieraus $M = Q \left\{ \frac{2}{3} \sin. \varphi \Sigma (y^3 e) - d. \varphi \right\}$, so wie die Höhe des Metacentrums über den Schwerpunkt des Déplacements

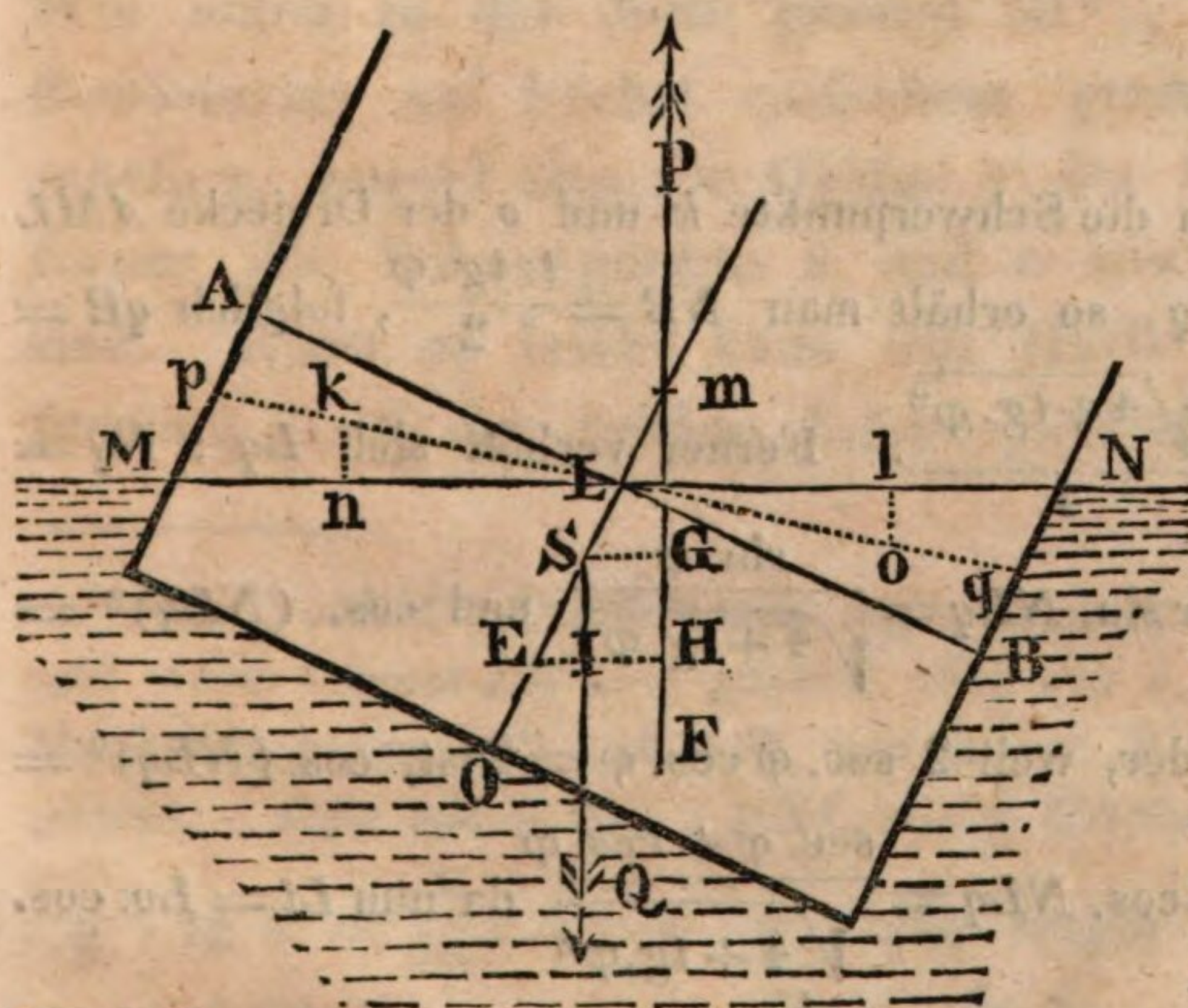
$$Em = \frac{2}{3} \frac{\Sigma (y^3 e)}{V}.$$

Diese Ausdrücke hat zuerst Bouguer in seinem *Traité du Navire* S. 272 angegeben. Den Mangel derselben erkennt man leicht, da die Voraussetzung eines unendlich kleinen Neigungswinkels höchstens für Flufsschiffe zulässig wäre, und das Stabilitätsmoment selbst nur dann richtig berechnet würde, wenn die Schwerpunkte S und E zusammenfielen.

§. 209.

Für die Anwendung der vorstehenden allgemeinen Ausdrücke mögen hier einige specielle Aufgaben folgen.

Fig. 137.



Aufgabe 1. Das Schiff Fig. 137 habe lauter rectanguläre Querschnitte, und gegeben sei das Gesamtgewicht Q , das Déplacement $MOB = MON = V$, die Breite $AB = t$, der Abstand der beiden Schwerpunkte S und $E = d$ und der

Winkel, um welchen das Schiff geneigt werden soll, d. i. $\angle OSQ = \varphi$. Die Länge des Schiffes sei der Einheit gleich.

Auflösung. Der Gestalt der Seiten nach ist hier anzunehmen, daß der Querschnittspunkt L der beiden Schwimmebenen AB und MN im Halbirungspunkte derselben liegt.*) Deshalb ergibt sich $v = BLN = \frac{t^2 \operatorname{tg} \varphi}{8}$,

$b = nl = \frac{t}{3} (\sec \varphi + \cos. \varphi)$ und somit das Stabilitätsmoment, nach I. des vorigen §.

(1) $M = Q \left\{ \frac{t^3 \operatorname{tg} \varphi}{24 V} (\sec. \varphi + \cos. \varphi) - d. \sin. \varphi \right\}$, ferner die Höhe des Metacentrums m über E , nach III.

$$(2) \quad Em = \frac{t^3 (\sec. \varphi + \cos. \varphi)}{24 V. \cos. \varphi}$$

Ist für einen besondern Fall $t = AB = 100$, $d = 13$, $V = 3600$, $Q = 1000$ Tonnen**), so erhält man aus (1) $M = 2841,7$ Tonnen. In der Entfernung $= 50$ von der Mastenebene kann daher eine Kraft (z. B. der Wind) von $\frac{2841,7}{50} = 56,8$ Tonnen wirken, und gegen die aufrechte Stellung eine Neigung von 15° veranlassen, ohne daß das Schiff umschlägt, vielmehr wird dasselbe, wenn gedachte

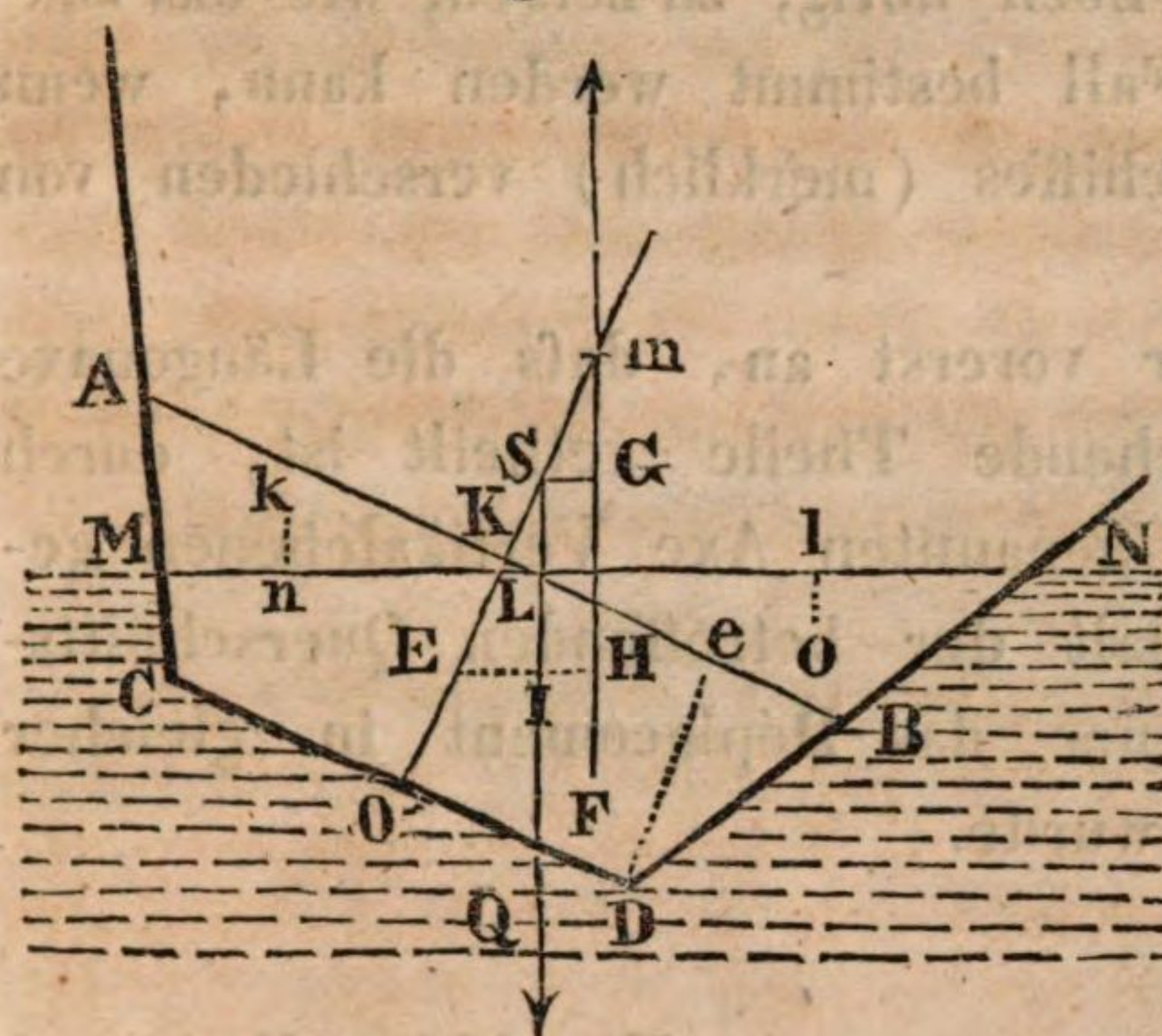
*) Zieht man durch die Schwerpunkte k und o der Dreiecke AML und LBN die Grade pq , so erhält man $NB = \frac{t. \operatorname{tg} \varphi}{2}$, folglich $qB = \frac{t. \operatorname{tg} \varphi}{4}$ mithin $Lq = \frac{t \sqrt{4 + \operatorname{tg} \varphi^2}}{4}$. Ferner verhält sich $Lq : Nq = \sin. LNq : \sin. NLq$, daher $\sin. NLq = \frac{\sin. \varphi}{\sqrt{4 + \operatorname{tg} \varphi^2}}$ und $\cos. (NLq)^2 = \frac{2 + \sec \varphi^2 + \cos. \varphi^2}{4 + \operatorname{tg} \varphi^2}$ oder, weil $2 \sec. \varphi \cos. \varphi = 2$ ist, $\cos. (NLq)^2 = \frac{(\sec. \varphi + \cos. \varphi)^2}{4 + \operatorname{tg} \varphi^2}$ d. i. $\cos. NLq = \frac{\sec. \varphi + \cos. \varphi}{\sqrt{4 + \operatorname{tg} \varphi^2}}$ da nun $Ll = Lo. \cos. NLq = \frac{2}{3} Lq. \cos. NLq$, so folgt $Ll = \frac{t}{6} (\sec. \varphi + \cos. \varphi)$ und hieraus endlich $b = nl = 2 Ll$, wie oben angegeben.

**) 1 Tonne = 1015,649 Kilogrm. = 2240 ℔ engl.

Kraft zu wirken aufhört, nach einigen Schwingungen in die erste, aufrechte Stellung von selbst zurückkehren.

Das Metacentrum liegt dabei nach (2) über E in der Höhe $Em = 23,9$.

Fig. 138.



Aufgabe 2. Die Querschnitte des Schiffes bilden lauter Trapeze $ABCD$ Fig. 138. Gegeben sei die Breite in der Schwimmebene beim aufrechten Stande $AB = a$, ferner $CD = c$, die Eintauchungstiefe $KO = h$, so wie der Neigungswinkel $OSQ = \varphi$.

Auflösung. Vorerst ist die Lage des Punktes L anzugeben, durch welchen die Durchschnittslinie der ersten Schwimmebene AB mit der neuen MN geht, welcher Punkt hier (wegen der Gestalt der Seiten AM und BN) nicht im Halbirungspunkte von AB mit MN liegen kann. Wie unten in der Note gezeigt ist*), kann aber gedachte Bestimmung auf höchst einfachem geometrischen Wege geschehen, worauf also die Größe v der allgemeinen Formeln, ferner die Schwerpunkte k und o sowie $ln = b$ zu finden sind. Eben so leicht kann mit Hülfe von §. 32 die Entfernung $= d$ der beiden Schwerpunkte E und S berechnet

*) Da $\triangle ALM = \triangle BLN$ sein muß, so folgt $BL \times LN = AL \times ML$, und wenn vorerst $LB = x$ gesetzt wird (1) $x \cdot LN = (a-x) ML$. Zur Bestimmung von LN und LM , werde von D auf AB die Normale De gefällt, $\angle DBe$ mit ψ und $\angle BNL$ mit χ bezeichnet. Sodann ist $Be = \frac{a-c}{2}$, $\text{tg. } \psi = \frac{h}{Be}$ u. $\chi = \psi - \varphi$, folglich wegen $BL : LN = \sin. \chi : \sin. \psi$, $LN = \frac{x \sin. \psi}{\sin. \chi}$, sowie $ML = \frac{(a-x) \sin. \psi}{\sin. (\varphi + \psi)}$. Durch Substitution letzterer beiden Werthe in (1) wird aber x und somit die Lage des Punktes L gefunden.

werden, worauf, weil auch $V = Q$ bestimmt werden können, die Aufgabe als gelöst zu betrachten ist.

§. 210.

Es bleibt nunmehr noch übrig, zu zeigen, wie das Stabilitätsmoment für den Fall bestimmt werden kann, wenn alle Querschnitte des Schiffes (merklich) verschieden von einander sind.

Hierzu nehmen wir vorerst an, daß die Längsaxe des Schiffes in entsprechende Theile getheilt ist, durch letztere rechtwinklig zur genannten Axe Vertikalebene gelegt und Form und Inhalt der betreffenden Querschnittsflächen bekannt ist; ferner das Déplacement in gleicher Weise vorher berechnet wurde.

Fig. 139.

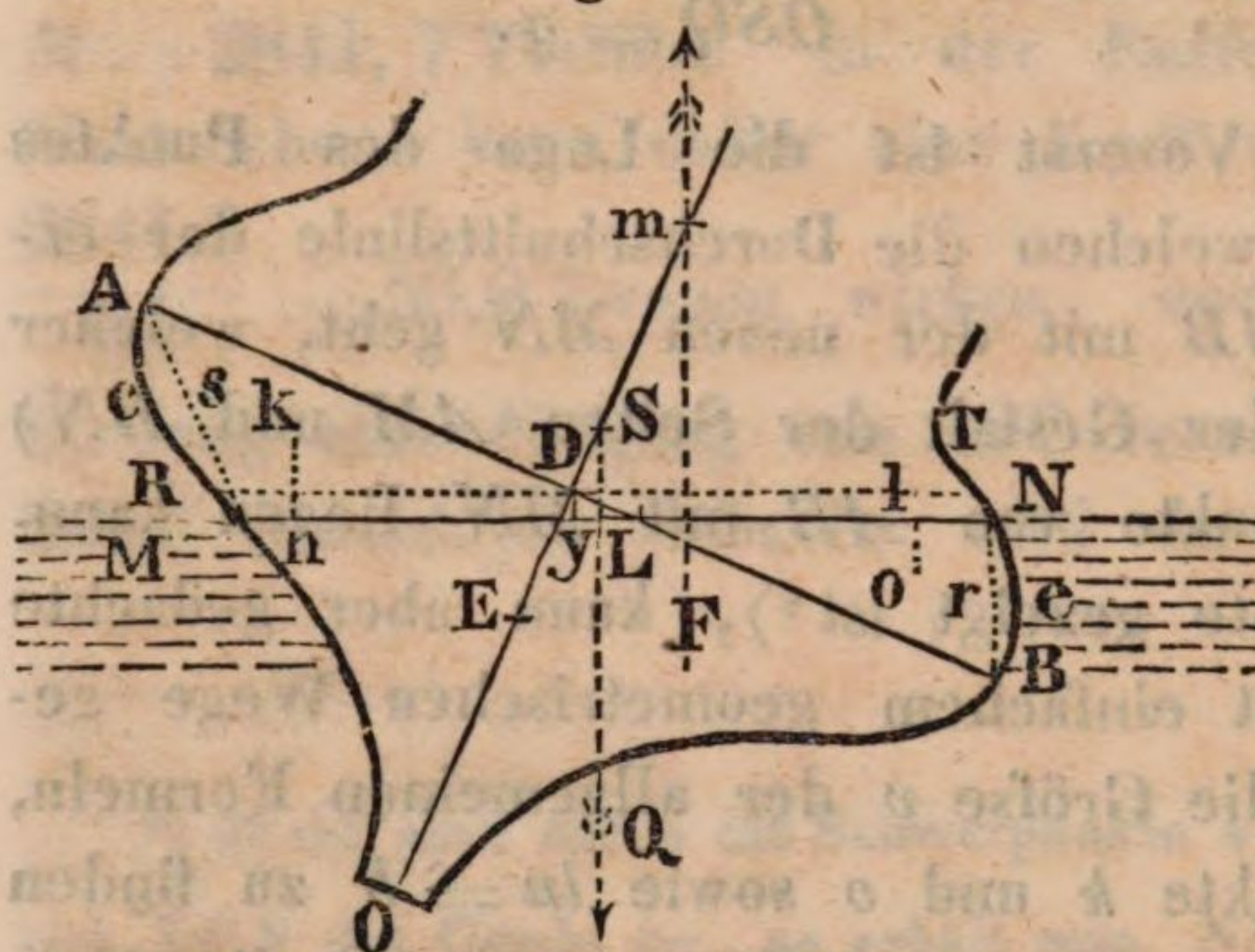


Fig. 139 stelle irgend einen der gedachten Querschnitte (z. B. den größten) dar, wobei AB die Schwimmebene bei aufrechter, MN die bei geneigter Lage des Schiffes bezeichnen mag. Vorerst ist hier zu bemerken, daß der

Punkt L , in welchem sich letztgenannte Ebenen schneiden, nicht auf die Weise bestimmt werden kann, wie solches in der zweiten Aufgabe des vorigen §. geschah, dadurch nämlich, daß in irgend einem einzelnen Querschnitte Fläche MLA der Fläche BLN gleich angenommen oder gemacht wurde, indem nach gegenwärtiger Voraussetzung das in das Wasser und aus dem Wasser getretene Volumen nicht den respectiven Flächen selbst proportional ist, wie solches bei durchaus ähnlich gleichen Figuren der Fall war. Wie verschieden aber auch die gleichliegenden Flächen AML und BLN in den verschiedenen Querschnitten sein mögen, so

wird doch immer noch das zwischen ihnen enthaltene Volumen in der ganzen Längenausdehnung des Schiffes, d. h. das respective aus^a und in das Wasser getretene Total-Volumen, gleich groß sein.

Auf eine für die Praxis hinreichend genaue Weise kann die Auflösung der fraglichen Aufgabe wie folgt geschehen. Man theile AB in zwei gleiche Theile und lege durch den Theilpunkt D eine Parallelebene RT zu MN . Der Abstand DL muß dann, wie leicht zu ermessen, in allen Querschnitten derselbe sein. Mit Zuziehung von Simpson's Regel berechne man ferner in jedem Querschnitte den Inhalt der Fläche $BDTe$ und hieraus das zwischen den Ebenen BD und DT enthaltene Volumen; auf gleiche Weise ermittle man das zwischen den Ebenen AD und RD enthaltene Volumen $ADRe$. Ersteres Volumen werde mit p , letzteres mit q bezeichnet, außerdem mag $p > q$ gefunden, auch der Inhalt $= a$ der durch RT gelegten horizontalen Schnittfläche bekannt sein. Sodann ergibt sich $DL =$

$\frac{p - q^*)}{a \sin. \varphi}$, wobei φ den Neigungswinkel des Schiffes bezeichnet. Ist aber L bekannt, so kann man für jeden Querschnitt die Fläche $LBNe$, mithin das ganze eingetauchte Volumen (was hierbei annähernd dem aus dem Wasser getretenen Volumen gleich sein wird) also überhaupt die Gröfse v der allgemeinen Formeln berechnen.

Um die zweite Gröfse $nl = b$ zu erhalten, bestimme man in allen Querschnitten die statischen Momente der Flächen $BrNe$ und $BLNe$, bezogen auf eine durch L gelegte Vertikalebene, addire solche sämmtlich und dividire die Summe durch v , so giebt der Quotient die Entfernung

*) Es sei fl. $BLNe =$ fl. $ALMc = e$, fl. $NLDT = m$, fl. $MLDR = n$, so wird man setzen können $BDTe = e + m$, $ADRe = e - n$, folglich die Differenz beider Letzteren, d. i. $MNTR = m + n = u$. Ist Dy der Abstand der Parallelen MN und RT so folgt auch $u = MN \times Dy = MN \times DL \sin. \varphi$, mithin $DL = \frac{u}{MN \sin. \varphi}$, woraus der obige Ausdruck leicht abgeleitet werden kann.

lL ; auf gleiche Weise verfähre man um Ln aufzufinden, wonach sodann $ln = Ln + Ll$ bekannt ist.

Die Lage des Schwerpunktes S hängt sowohl von der Construction als Ausrüstung und Ladung des Schiffes ab, welche Umstände fast immer die Bestimmung der Lage desselben, so wie weiter die Gröfse $ES = d$ zulassen. Als Annäherungswerth kann man zuweilen $ES = \frac{1}{8}$ der grölsten Breite des Schiffes, in der Schwimmebene gemessen, annehmen.

Spezielle Aufgaben, namentlich Zahlenbeispiele für vorstehende Fälle hier aufzuführen, gestattet der Raum nicht, weshalb wir auf ausführlichere Werke verweisen müssen.*)

Anmerkung. Nicht ohne Werth und Nutzen möchte es sein, unsere allgemeinen Formeln §. 208 zur Herleitung der Ausdrücke zu benutzen, welche Tredgold in seinem bekannten Werke The Steam Engine etc. im Artikel Steam Navigation §. 595 ohne gehörigen Beweis aufstellt, auch ohne dabei anzugeben, auf welche besondere Voraussetzung dieselben basirt sind.

Angenommen ist dabei zuerst, daß alle Querschnitte des Schiffes ähnlich gleiche Figuren bilden und die respective aus dem Wasser und in dasselbe getauchten Flächen als ähnlich gleiche Dreiecke betrachtet werden können. Bezeichnet man daher, in Fig. 135, die Breite AB mit e , so ist unser $v = \frac{e^2 \sin. \varphi}{8}$, so wie $b = \frac{2}{3} e$ und nach I. §. 208, wenn $Q = V$ gesetzt wird,

$$(1) M = \frac{1}{12} e^3 \sin. \varphi - d. V. \sin. \varphi.$$

Im Betreff der Entfernung $ES = d$, hat Tredgold vorausgesetzt, daß der Schwerpunkt S des ganzen Schiffes in der Schwimmebene AB liegt. Da ferner die Begrenzungscurven der Querschnittsflächen als Parabeln angenommen sind, deren Gleichungen die allgemeine Form $y^n = px$ haben, so besteht die Bestimmung von d einfach darin, den rechtwinkligen Abstand des Schwerpunkts der betreffenden Fläche von AB aufzufinden.

Für die Apollonische Parabel, deren Gleichung $y^2 = px$ ist, läßt sich, wenn in Fig. 135 A oder B als Scheitel, AB als Absissenaxe angenommen wird, mit Hülfe der Simpsons'chen und Guldin'schen Regel, die Schwerpunktsentfernung $DS = \frac{3}{8} DO$ und $DO = a$ gesetzt,

*) Atwood. A Disquisition on the Stability of Ships in den Phil. Transact. vom Jahre 1798. p. 287.

Jamieson Mechanics of Fluids. London 1837. p. 382.

$d = \frac{3}{8} a$, den Inhalt der Fläche $ABO = \frac{2}{3} ae = V$ finden, so dass aus (1) erhalten wird

$M = \frac{1}{12} e \cdot \sin. \varphi (e^2 - 3 a^2)$, wie ebenfalls Tredgold angiebt.

Die allgemeinen Formeln an gedachtem Orte erhält man auf folgende Art. Unter der Voraussetzung, dass die Coordinaten wie im vorstehenden speciellen Falle gewählt werden, findet man für alle Parabeln der bemerkten Familie: $DS = \frac{n+1}{2(n+2)} a$; dagegen wenn O zum Scheitel, AB als Ordinaten DO als Abscissen-Axe angenommen wird:

$DS = \frac{n}{2n+1} a$. Für beide Fälle ist aber der Flächeninhalt der Parabel $\frac{n}{n+1} \cdot ae$, daher nach (1)

wenn man die Ordinaten parallel zur Tiefe DO nimmt:

$$M = \frac{1}{12} e \cdot \sin. \varphi \left\{ e^2 - \frac{6n}{n+2} a^2 \right\}; \text{ dagegen}$$

wenn man sie parallel der Breite AB nimmt:

$$M = \frac{1}{12} e \cdot \sin. \varphi \left\{ e^2 - \frac{12n^2 a^2}{(2n+1)(n+1)} \right\}.$$

Bestimmung der specifischen Gewichte fester und nichtzusammendrückbar flüssiger Körper.

§. 211.

Bezeichnet s das specifische Gewicht eines beliebigen Körpers, P dessen absolutes Gewicht und p das absolute Gewicht eines Wasserkörpers von gleichem Volumen, so erhält man unmittelbar aus §. 201*)

*) Zu dem, wie an gedachtem Orte der Begriff spec. Gewicht festgestellt wurde, werde hier, zur weiteren Erläuterung, noch Folgendes gefügt. Das Gewicht der Körper (der Druck auf eine horizontale Unterlage, das Product aus Masse und Erddacceleration) an und für sich betrachtet, ohne Rücksicht auf ihr Volumen, wie wir solches §. 25 stillschweigend voraussetzen, nennt man das absolute Gewicht; die Vergleichung der absoluten Gewichte aber, mit Rücksicht auf die Volumen der respectiven Körper, das Verhältniss des absoluten Gewichtes zum Volumen, ihr specifisches Gewicht.

Um jedoch in die Bestimmung des spec. Gewichts Uebereinstimmung zu bringen, wählt man einen bestimmten Körper zur Einheit der Vergleichung und zwar für feste Körper und nichtzusammendrückbare Flüssigkeiten das reine (destilirte) Wasser, für zusammendrückbare Flüssigkeiten die atmosphärische Luft.

$$1) s = \frac{P}{p}$$

Bezeichnet ferner γ die Dichte oder das Gewicht einer Cubikeinheit Wasser und v das vorausgesetzte gleiche Volumen, so ist $p = \gamma v$, also auch

$$2) s = \frac{P}{\gamma v}, \text{ so wie}$$

3) $P = \gamma s v$, oder, wenn d die Dichte des Körpers P ausdrückt, 4) $P = d v$. Haben sodann für irgend einen anderen Körper die Größen P' , p' , s' , v' und d' dieselbe Bedeutung, so erhält man folgende Proportionen:

$$s : s' = \frac{P}{p} : \frac{P'}{p'} = \frac{P'}{v} : \frac{P}{v'} \text{ etc., und hieraus}$$

für $v = v$,

$$5) s : s' = P : P',$$

für $P = P'$,

$$6) s : s' = v : v' \text{ etc.}$$

Gleichungen und Proportionen, welche sich leicht in Worten ausdrücken lassen.

§. 212.

Die Bestimmung der spec. Gewichte fester und nicht-zusammendrückbar flüssiger Körper, unter Anwendung der Formeln des vorigen §., macht meistentheils, zur Herleitung der dort vorkommenden Größen, verschiedene Hilfsmittel nothwendig, wovon die hauptsächlichsten die hydrostatische Wage, Glasgefäße (Flaschen) mit eingeschliffenem Stöpsel und die sogenannten Senkwagen (Aräometer) sind.

Genannte Hilfsmittel mögen zur Anordnung der Folgenachstehender Sätze dienen, und in Hinsicht der fraglichen Bestimmungen selbst werde bemerkt, dass vorerst von allen (später anzugebenden) Correctionen, wegen Temperatur, Luftdruck etc. abgesehen, jedoch vorausgesetzt wird, dass die Temperatur des zu untersuchenden wie des Hülfskörpers eine bestimmte ist.

Die hydrostatische Wage ist nichts anderes als

eine doppelarmig gleicharmige Wage von grosser Genauigkeit und Empfindlichkeit, die so eingerichtet ist, dass man damit Körper unter Wasser abwägen kann. Zu diesem Zwecke ist unter einer der Schalen ein Haken angebracht, woran ein feiner Faden (Draht, Haar) befestigt ist an welchem der betreffende Körper aufgehangen werden kann.

1) Ist sodann der Körper, dessen spec. Gewicht bestimmt werden soll, ein fester im Wasser unauflöslicher und zugleich specifisch schwerer als letzteres, so ermittelt man vorerst sein absolutes Gewicht $= P$ in der Luft, sodann am Faden aufgehangen, sein absolutes Gewicht $= q$ im Wasser, wonach zufolge §. 201. das Gewicht des gleichgrossen Wasservolumens $p = P - q$ und nach 1) des vorigen §. das spec. Gewicht erhalten wird zu

$$s = \frac{P}{P - q}.$$

2) Ist der feste Körper spec. leichter als Wasser, so hat man ihn mit einem anderen Körper mechanisch derartig zu verbinden, dass beide vereint vollkommen ins Wasser tauchen. Das Weitere ergibt sich aus Folgendem.

Das absolute Gewicht des spec. schwereren Körpers sei $= P$, das des leichteren $= Q$; im Wasser wiege ersterer $= q$, die Verbindung beider $= W$. Sodann ist für den ersten Körper der Auftrieb $= P - q$, für die Verbindung $P + Q - W$, folglich für den leichteren Körper allein $(P + Q - W) - (P - q) = Q + q - W$, mithin

$$s = \frac{Q}{Q + q - W}.$$

3) Vermag der Körper Wasser in seinen Poren aufzunehmen, so wiegt man ihn zuerst in trockenem Zustande an der Luft, lässt ihn sodann ganz mit Wasser ansaugen, wiegt ihn nochmals, erhält hierdurch das Gewicht des aufgenommenen Wassers, bestimmt endlich seinen Gewichtsverlust im Wasser etc.*).

*) Für die meisten technischen Zwecke möchte hier die Methode weit empfehlenswerther sein, welche Karmarsch (Jahrb. d. k. k.

4) Löst sich der Körper im Wasser auf, so wendet man eine Flüssigkeit an, in welcher er unauflöslich und deren spec. Gewicht bekannt ist. Durch Ermittlung seines Gewichtsverlustes in gedachter Flüssigkeit und nachheriger Anwendung der Proportion 5) des vorigen §. ergibt sich das spec. Gewicht.

5) Ist das spec. Gewicht einer Flüssigkeit zu bestimmen, so taucht man einen geeigneten festen Körper einmal in diese, ein anderes Mal ins Wasser, worauf man ebenfalls unter Anwendung der Proportion 5) das gesuchte spec. Gewicht erhält.

Obwohl die hydrostatische Wage in physikalischer Hinsicht der genaueste und sicherste Apparat zur Bestimmung der spec. Gewichte fester und flüssiger Körper genannt werden muß, so verdienen doch von den Technikern, die übrigen angegebenen Mittel, da sie weniger kostbar und mühsam zu behandeln sind, in vielen Fällen vorgezogen zu werden.

Anmerkung. Mit besonderen Vortheilen benutzt man die hydrostatischen Wägungen zur Bestimmung des absoluten Gewichtes des Wassers. Das beste Verfahren hierzu ist, einen Körper von bekanntem a. Gewicht und Volumen, z. B. einen hohlen aber überall geschlossenen höchst genau gearbeiteten Messingcylinder, im Wasser abzuwägen. Ist sodann das a. Gewicht $= P$, das Volumen $= V$ und das a. Gewicht im Wasser $= q$ gefunden, so erhält man (abgesehen von sonstigen, nothwendigen Correctionen) $\gamma = \frac{P-q}{V}$. Wie man diesen Satz zur Regulirung der Gewichte und Hohlmasse in den verschiedenen Ländern benutzt hat, soll in der Aërostatik ausführlich erörtert werden.

polytechn. Inst. Bd. 18. S. 120) zur Bestimmung des spec. Gewichts verschiedener Holzgattungen (später auch für Klinker und Mauerziegel) anwandte, nämlich möglichst genau gearbeitete parallelepipedische Stücke der betreffenden Körper anfertigen zu lassen, deren mittlere Dimensionen zu finden (Karmarsch nahm solche in Zehntheilen eines Millimeters), den cubischen Inhalt $= v$ sowie das entspr. a. Gewicht $= P$ zu bestimmen und sodann nach Formel 2) §. 211 das spec. Gewicht zu ermitteln. Weit weniger geeignet scheint uns das Verfahren, solche poröse Körper mit gut geknetetem Wachse zu umhüllen, dessen spec. Gewicht genau (?) bekannt sein muß.

§. 213.

Einer Flasche mit eingeschliffenem Stöpsel kann man sich oft mit Vortheil sowohl zur Bestimmung des spec. Gewichts kleiner (körniger oder pulverförmiger) fester Körper, als von Flüssigkeiten bedienen.

Im ersten Falle wiegt man zuerst den (festen) Körper allein, und sein a. Gewicht sei $= P$, legt ihn sodann nebst der mit Wasser angefüllten Flasche in die eine Schale einer Wage und in die andere, fürs Gleichgewicht, ein entsprechendes Gegengewicht $= Q$. Hierauf bringt man den festen Körper in die Flasche, stellt zugleich die vollkommene Wasserfüllung wieder her und setzt endlich die Flasche in diesem Zustande wieder auf die erste Wagenschale. Nothwendigerweise wird man jetzt auf diese Schale noch ein gewisses Gewicht $= p$ bringen müssen, um dem ersten Gegengewichte Q wiederum das Gleichgewicht zu halten. Das Zulegegengewicht p wird aber das Gewicht des vom festen Körper verdrängten Wassers angeben, so daß

das gesuchte spec. Gewicht $= \frac{P}{p}$ ist.

Im zweiten Falle wiegt man die Flasche zuerst leer, sodann mit Wasser und endlich mit der Flüssigkeit gefüllt, deren spec. Gewicht bestimmt werden soll. Sind sodann q , Q und R die respectiven durch gedachte drei Wägungen erhaltenen Gewichte, so erhält man das gesuchte spec. Gewicht offenbar durch die Gleichung,

$$s = \frac{R - q}{Q - q}.$$

Anmerkung. Bei feinkörnigen und pulverförmigen Körpern hat man besonders zu beachten, daß an denselben keine Luftblasen hängen bleiben, wozu man die Flasche unter den Recipienten einer Luftpumpe stellen, oder wenn es der betreffende Körper erlaubt, die Flüssigkeit einige Zeit sieden lassen kann.

Für sehr sorgfältige Bestimmungen des spec. Gewichtes sowohl pulverförmiger Körper, als solcher, welche Wasser einsaugen, läßt sich höchst vortheilhaft das von Say zuerst angegebene und von Leslie wieder in Vorschlag gebrachte Stereometer anwenden, wobei die atmosphä-

rische Luft die Stelle der (tropfbaren) Eintauchungsflüssigkeit vertritt.*) Neuerdings hat Kopp**) gedachtes Instrument (von ihm Volumenometer genannt) zwar vollkommener aber auch complicirter gemacht. In Betreff weiterer Auseinandersetzungen hierüber muß auf die unten angegebenen Werke verwiesen werden.

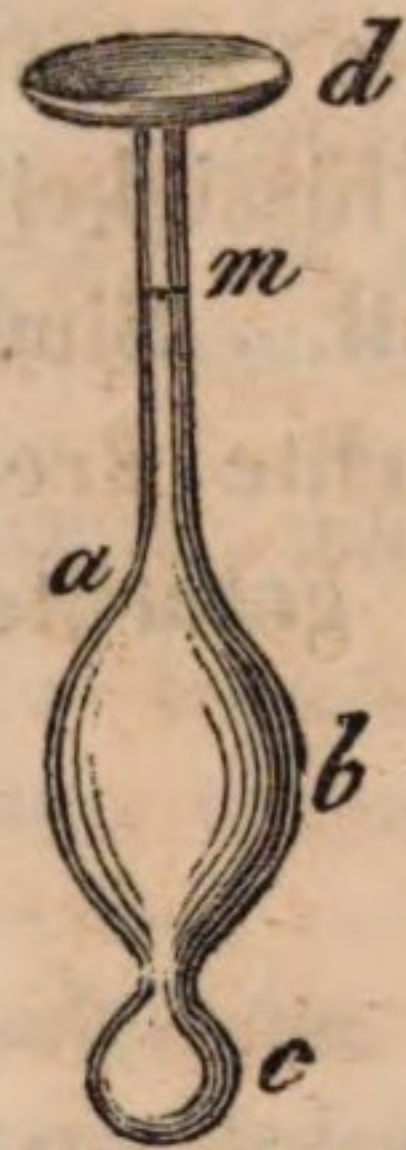
Für Körper, welche Luft absorbiren, sind indess auch diese Instrumente nicht anwendbar, weshalb man in dergleichen Fällen am besten so verfährt, daß man ein Gefäß von bekanntem Rauminhalte mit dem zu bestimmenden pulverförmigen Körper anfüllt und hiernach das spec. Gewicht ableitet.

§. 214.

Aräometer***) (Senkwagen, Schwimwagen) sind freischwimmende Körper von entsprechender Gestalt, durch deren Einsenkung in Flüssigkeiten sowohl das spec. Gewicht dieser, als auch fester Körper bestimmt werden kann. Ihr Constructions-Princip beruht entweder auf Proportion 5) oder 6) §. 211 und hiernach nennt man sie Gewichts-Aräometer oder Scalen- (Volumen-) Aräometer.

Gewichts - Aräometer.

Fig. 140.



Will man mittels dieser Aräometer nur das spec. Gewicht flüssiger Körper bestimmen, so giebt man ihnen (nach Fahrenheit) im Allgemeinen die Gestalt von Fig. 140. Dabei ist *ab* ein aus Glas oder Blech gefertigter, hohler, cylinder- oder birnförmiger Körper, der unterhalb eine mit Bleischrot oder Quecksilber gefüllte Kugel *c* trägt, oberhalb auf einem sehr dünnen Halse mit einem Schälchen *d* versehen ist, um

*) Say's Instrument findet man abgebildet und beschrieben in Gilb. Annalen Bd. 2. S. 230; in Gehler's physik. Wörterb. Bd. 1. S. 395, jedoch mit unrichtiger Ableitung der daselbst angegebenen Formeln, richtig indess in Brewer's Lehrb. der Mechanik. Bd. 3. S. 272. Ueber Leslie's Instrument sehe man Kastner's Archiv Bd. 8. S. 326.

**) Kopp's Volumenometer in Liebig's Annalen der Chemie und Pharmacie. Bd. 35. S. 17 und hieraus im Auszuge (aber mit besseren Abbildungen) in Müller's deutscher Bearbeitung des Pruillet'schen Lehrbuches der Physik. Bd. 1. S. 158.

***) Von ἀραιὸν locker, dünn und μέτρον Maß.

Gewichte auflegen zu können. Am gedachtem Halse ist ein Zeichen (Marke, Strich) m angebracht, bis zu welchem das Instrument beim Gebrauche stets einsinken mußs. *)

Fig. 141. Soll dies Aräometer gleichzeitig auch für feste Körper brauchbar sein, so bringt man (nach Nicholsen) statt der Kugel c ein Eimerchen g . Fig. 141 an, welches zur Aufnahme des zu untersuchenden Körpers dient. Bemerktes Eimerchen läßt sich auch (nach Charles) durch ein Drahtkörbchen ersetzen, wobei sich weniger Luft, ohne gesehen zu werden, anhängen kann.



Bei der Bestimmung des spec. Gewichts flüssiger Körper verfährt man übrigens folgendermaßen:

Man ermittelt das absolute Gewicht des ganzen Instruments, welches $= P$ gefunden sein mag, senkt dasselbe hierauf einmal in Wasser, ein anderes Mal in die zu untersuchende Flüssigkeit und legt auf das Schälchen d stets so viel Gewicht, daß das Instrument bis zur Marke m einsinkt. Beträgt sodann das Zulegegewicht beim Einsenken im Wasser $= Q$, bei der fraglichen Flüssigkeit, deren spec. Gewicht $= s$ gefunden werden soll, aber Q_1 , so ist

$$s = \frac{P + Q_1}{P + Q}$$

Zur Bestimmung des spec. Gewichtes fester Körper braucht man das a. Gewicht des ganzen Instruments nicht zu kennen und verfährt wie nachstehend.

Man senkt das Instrument in Wasser und ermittelt das in die Schale d zu legende Gewicht $= Q$, damit die Einsenkung bis zur Marke m erfolgt, entfernt Q wieder, bringt den zu untersuchenden Körper einmal in das Schälchen d , ein anderes Mal in das Eimerchen g und legt in

*) Eine andere Einrichtung (von Tralles) besteht darin, daß man den Teller oben am Halse durch eine Wagschale ersetzt, die von einem zweimal rechtwinklig umgebogenen Arme unter dem Gefäße getragen wird, welches mit der zu prüfenden Flüssigkeit angefüllt ist.

beiden Fällen respective die Gewichte q und q^1 zu, damit das Einsenken bis zur Marke m erfolgt. Hierdurch erhält man das a. Gewicht des Körpers in der Luft zu $Q - q$, im Wasser zu $Q - q^1$, folglich den hydrostatischen Auftrieb $(Q - q) - (Q - q^1) = q^1 - q$ und somit das spec. Gewicht

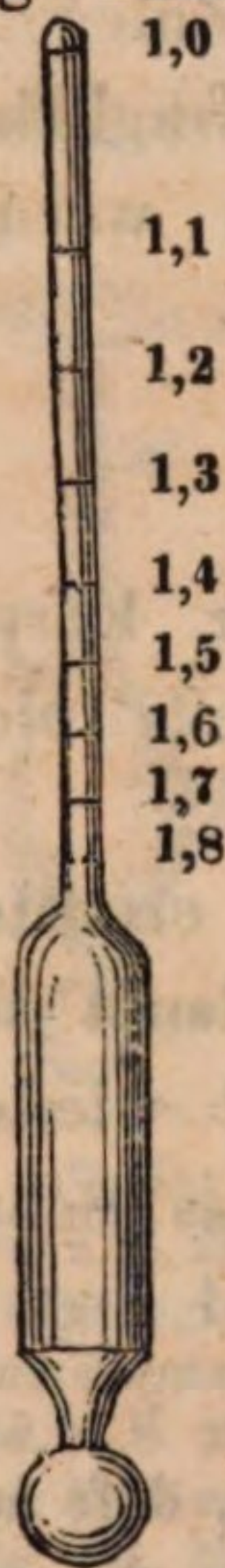
$$s = \frac{Q - q}{q^1 - q}.$$

Obwohl man mittels dieser Aräometer die spec. Gewichte genau zu bestimmen im Stande ist, so benutzt man sie für (gewöhnl.) technische Zwecke, namentlich für flüssige Körper deshalb nicht, weil sie die spec. Gewichte der zu untersuchenden Flüssigkeit nicht unmittelbar (oder mittelbar nicht einfach genug) anzeigen. Zu gedachtem Zwecke werden daher beinah ausschließlich Scalenaräometer in Anwendung gebracht.

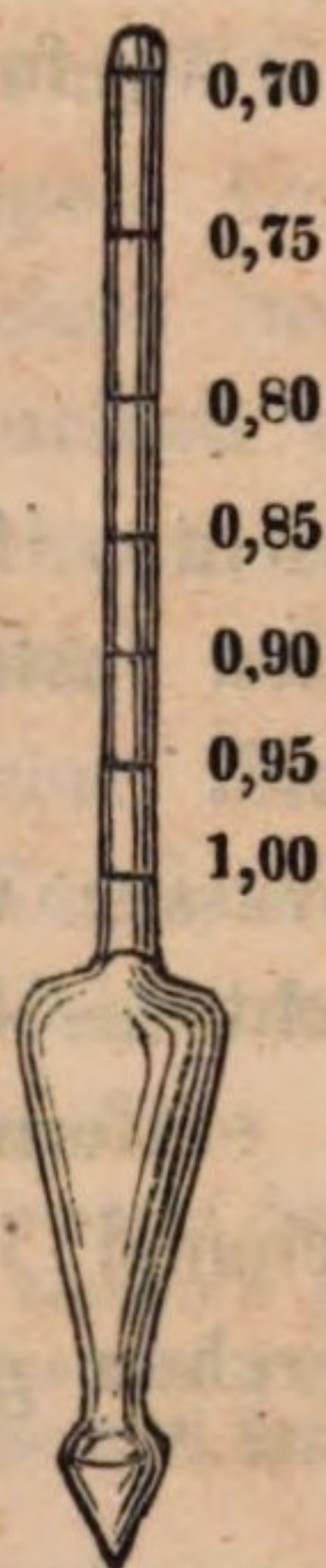
§. 215.

Scalen - Aräometer.

Fig. 142.



F.g. 143.



Die gebräuchlichsten Gestalten dieser Aräometer Fig. 142 und Fig. 143 unterscheiden sich von den vorher beschriebenen Fahrenheit'schen nur dadurch, daß ihr Hals länger, das Schälchen auf demselben weggelassen und dafür eine geeignete Theilung (Scale) angebracht ist. *)

Wir handeln hier nur von den sogenannten allgemeinen Scalen-Aräometern, d.h. von denen, welche ohne Unterschied für Flüssigkeiten jeder Art gebraucht werden können, während die besonderen Aräometer, die entweder nur für gewisse Flüssig-

*) Ausnahmen von gedachter Form machen unter anderen die Aräometer von Richter und Meißner, welche aus einer sehr langen (circa 5 Decimeter), durchaus cylindrischen Glasröhre bestehen und denen defs-

keiten dienen, oder nicht das spec. Gewicht, sondern allein den Gehalt an irgend einem beigemischten oder aufgelösten Stoffe angeben (Procent-Aräometer) unbeachtet bleiben müssen.*)

Von den allgemeinen Aräometern sollen ferner blos die mit sogenannter wissenschaftlicher Scale, d. h. solche ausführlicher betrachtet werden, welche zur unmittelbaren Angabe der spec. Gewichte dienen, während die mit willkürlicher (empirischer) Scale nur entsprechende Andeutungen erfahren sollen.

§. 216.

Nach vorstehenden Auseinandersetzungen wird hauptsächlich anzugeben sein, auf welche Weise die wissenschaftliche Scale eines Aräometers zu entwerfen ist. Hierbei kommt es aber darauf an, ob man Instrumente mit genau cylindrischem Halse voraussetzt, oder nicht.

1. Scale unter Voraussetzung eines genau cylindrischen Halses.

Für solche giebt es im Allgemeinen zwei Methoden der Entwerfung. Nach der ersten braucht man am Halse nur einen festen Punct zu kennen, bis zu welchem das Instrument in eine Flüssigkeit von bekanntem spec. Gewichte einsinkt, allein es müssen auch die Dimensionen des Halses genau gegeben sein. Nach der zweiten Methode muß man zwei feste Puncte kennen, bis zu welchen das Instrument respective in zwei verschiedenen Flüssigkeiten von ungleichem spec. Gewichte einsinkt, wofür man aber nicht nöthig hat, die Dimensionen des Halses zu beachten.

Die Entwerfung der Scale nach der zweiten Methode, als der genauesten und zugleich bequemsten, macht folgende Rechnungen nothwendig.**)

halb gewöhnlich ein zweiter, weiterer, oben offener Cylinder beigegeben ist, welcher mit der zu prüfenden Flüssigkeit gefüllt wird.

*) Ueber besondere Aräometer sehe man Meißner's Aräometrie in ihrer Anwendung auf Chemie und Technik. Wien 1816. S. 139. Vorzüglich aber das Handwörterbuch der reinen und angewandten Chemie von Liebig. Bd. 1. S. 474.

**) Die Entfernung der Scale nach der ersten Methode würde nachstehende Rechnungen erfordern. Es sei P das absolute Gewicht des

Sind $s_1 s^1$ und s_2 die spec. Gewichte dreier verschiedener Flüssigkeiten, ferner $v_1 v^1$ und v_2 die respectiven Volumen, um welche das Instrument bei gleichem a. Gewichte in die bemerkten Flüssigkeiten einsinkt, so läßt sich setzen

$$v^1 : v = s : s^1$$

$$v^1 - v : v = s - s^1 : s^1$$

und hiernach

so wie endlich

$$v_2 : v = s : s_2$$

$$v_2 - v : v = s - s_2 : s_2$$

nach vorgenommener Division und Reduction

$$I. v^1 - v = (v_2 - v) \frac{s - s^1}{s - s_2} \cdot \frac{s_2}{s^1}.$$

In dieser Formel erkennt man leicht, daß, wenn s und s_2 als bekannt vorausgesetzt werden, $v_2 - v$ den Abstand der vorgedachten beiden festen Punkte (Normalpunkte) der Scale repräsentirt, so wie $v^1 - v$ diejenige Gradzahl oder die Entfernung desjenigen Theilstriches bezeichnet, dem das spec. Gewicht $= s^1$ entspricht und zwar von dem Normalpunkte ausgerechnet, dessen spec. Gewicht $= s$ ist.

Gesetzt, man habe ein Aräometer für schwerere Flüssigkeiten als Wasser zu entwerfen, womit die spec. Gewichte von 1,00 bis zu 1,80, bei 0,1 gleicher Differenz, anzugeben sind. (Fig. 142.)

Hierzu bestimme man vorerst, durch Eintauchung des Instrumentes in Wasser und respective in eine Flüssigkeit, deren spec. Gewicht zu 1,8 bekannt ist, den Normalab-

struments, v das Volumen, um welches dasselbe im Wasser einsinkt, γ das Gewicht der Cubikeinheit des letzteren, so ist zuerst (1) $P = \gamma v$. Senkt man das Instrument in eine Flüssigkeit von spec. Gewichte $= s < 1$ und ist a der Querschnitt des Halses, b die Einsenkungstiefe desselben in letztere Flüssigkeit, so erhält man fürs Gleichgewicht: $P =$

$$\gamma s v + \gamma s a b \text{ und wegen (1) } P = P s + \gamma s a b, \text{ woraus } b = \frac{P}{\gamma a} \left(\frac{1-s}{s} \right)$$

folgt. Der Querschnitt a könnte sodann [dadurch bestimmt werden, daß man das Instrument wieder in Wasser einsenkt, ein Zulegegewicht p beifügt und hierbei die Einsenkungstiefe $= c$ bemerkt, wonach $p = \gamma a c$, folglich $b = \frac{cP}{p} \left(\frac{1-s}{s} \right)$ erhalten würde. Für den Fall, daß

$$s > 1, \text{ findet man ebenso: } b = \frac{cP}{p} \left(\frac{s-1}{s} \right).$$

stand $v_2 - v$ und theile solche in beliebig viel, am zweckmässigsten in 100 gleiche Theile. Sodann folgt aus I., wegen $v_2 - v = 100$, $s = 1,8$ und $s_2 = 1$, $v_1 - v = \frac{225 - 125 \cdot s^1}{s^1}$, nach welcher Formel nachstehende Tabelle berechnet ist. *)

Spec. Gewichte $= s_1$	Abstände der Theilstriche vom untersten Normalpuncte des Halses $= v^1 - v$	Größe der Aräometergrade.	Differenzen.
1,0	100,00	20,46	
1,1	79,54	17,04	3,42
1,2	62,50	15,74	2,77
1,3	48,07	13,05	1,75
1,4	35,71	10,71	1,88
1,5	25,00	9,38	1,33]
1,6	15,62	8,32	1,06
1,7	7,30	7,30	1,02
1,8	0,00		

Eben so erhält man für ein Aräometer, welches, für leichtere Flüssigkeiten als Wasser, die spec. Gewichte von 0,7 bis 1,0, bei 0,5 Differenz derselben, angeben soll, $v - v_1 = \frac{1000}{3} \cdot \frac{s_1 - 0,7}{s_1}$ und daher: (Fig. 143.)

Spec. Gewichte $= s_1$	Abstände der Theilstriche vom obersten Normalpuncte.	Größe der Aräometergrade.	Differenzen.
0,70	0,00	22,22	
0,75	22,22	19,44	2,78
0,80	41,66	17,14	2,30
0,85	58,80	15,26	1,88
0,90	74,06	13,60	1,66
0,95	87,66	12,34	1,26
1,00	100,00		

*) Man wird leicht erkennen, dass die Erfahrungspuncte nicht gerade an den Enden der Scale zu liegen brauchen.

Sowohl aus der allgemeinen Gleichung als den Tabellen erkennt man, daß die Aräometer-Grade wachsen, wenn die spec. Gewichte abnehmen und gleichen Räumen der Scale, nicht gleichen Unterschieden im spez. Gewichte, entsprechen; ebenso erhellt, daß das Aräometer um so empfindlicher wird, je dünner der Hals desselben ist. Um letzteres befolgen zu können, ohne den Hals zu lang, das Instrument weder instabil noch unbequem zu machen, ist es rathsam, namentlich bei schweren Flüssigkeiten, die Scale auf mehrere Instrumente zu vertheilen. Zur Prüfung bereits getheilter Scalen kann man nachstehende Formel benutzen, welche aus I. leicht abzuleiten ist:

$$s^1 = \frac{s s_2 (v_2 - v)}{s_2 (v_2 - v) + (s - s_2) (v^1 - v)}$$

§. 217.

Entwerfung der Scale, ohne genau cylindrische Hülfe vorauszusetzen.

Das einfachste und zugleich sicherste Verfahren hierzu beruht darauf, daß es offenbar gleichgültig ist, ob man, bei gleichbleibendem Gewichte, das Instrument, dessen Einsenkungstiefe in eben so viele Flüssigkeiten von verschiedenem aber bekannten spec. Gewichte untersucht und notirt, so vielen spec. Gewichten das Instrument entsprechen soll; oder das Gewicht des Instruments derartig abändert, daß es im Wasser stets so weit einsinkt, als es sich, ohne Gewichtsänderung, in eine Flüssigkeit von bestimmten spec. Gewichte eingesenkt haben würde.*)

Leicht erkennt man, daß es hiernach bei der Entwerfung der Scale nur darauf ankommt, die Gröfse anzugeben, um welche das constante Gewicht eines Aräometers vermehrt oder vermindert werden muß, damit die Einsenkungstiefen bestimmten spec. Gewichten entsprechen.

*) Diese zuerst von Brisson angegebene Methode wird in Liebig's Handwörterbuch der Chemie Bd. 1. S. 463 fälschlich (jedenfalls aus Versehen) als eine solche bezeichnet, welche ebenfalls genau cylindrische Hälse voraussetzt.

Zur Berechnung gedachter Gewichtsgröße $= z$, sei P das a. Gewicht des Aräometers und v das Volumen, um welches es dabei in eine Flüssigkeit von spec. Gewichte $= s$ eintaucht. Soll nun das Aräometer im Wasser um dasselbe Volumen $= v$ einsinken, so erhält man das dann nöthige Gewicht $= x$ desselben durch die Proportion (nach 5. §. 211) : $P : x = s : 1$, d. i. $x = \frac{P}{s}$.

Ist sodann $s < 1$, so ist auch $P < \frac{P}{s}$, mithin die nothwendige Gewichtsvermehrung:

$$\text{I. } z = \frac{P}{s} - P = P \left(\frac{1-s}{s} \right).$$

Ist dagegen $s > 1$, also auch $P > \frac{P}{s}$, so erhält man als nöthige Gewichtsverminderung: II. $z = P \left(\frac{s-1}{s} \right)$.

Die hiernach berechneten Gewichtsveränderungen, für jeden einzelnen Scalentheil des anzufertigenden Aräometers, können entweder so vorgenommen werden, dafs man sich geeignete kleine Körper (Messing- oder Stahl-Drahtstückchen) von bestimmtem Gewicht in entsprechender Anzahl verschafft, welche leicht in die engste Glasröhre einzubringen und respective zu entfernen sind, oder dafs man das Aräometer mittels eines Haares an den einen Arm einer doppelarmigen Wage aufhängt, während der andere Arm (Schale) zur Aufnahme der erforderlichen Gewichte benutzt wird. *)

Vorstehende Methode läfst sich auch zur Prüfung der

*) Bei letzterem Verfahren ist jedenfalls einleuchtend, das für spec. leichtere Flüssigkeiten als Wasser, die Gewichtsveränderung in einer Vermehrung, für spec. schwerere in einer Verminderung des ursprünglichen Aräometergewichts bestehen muß.

Scalen bereits verfertigter Aräometer höchst vortheilhaft anwenden. *)

Anmerkung. Von den Aräometern mit empirischer Scale, deren Abtheilungen gleich groß sind, letztere daher, zufolge §. 216, nicht gleich großen Unterschieden im spec. Gewichte entsprechen können, führen wir hier nur die gebräuchlichsten, nämlich die von Baumé, Cartier und Beck an.

Baumé stellte zwei solche Aräometer dar, eins für spec. leichtere und eins für spec. schwerere Flüssigkeiten als Wasser. Für erstere bezeichnete er den Punct der Scale, bis zu welchem das Instrument im Wasser einsank mit der Zahl 10, einen zweiten (tiefer liegenden) Punct erhielt er durch Eintauchen in eine Auflösung von 1 Theil Kochsalz in 9 Theilen Wasser; den Abstand beider Puncte theilte er in 10 gleiche Theile, bezeichnete den untersten mit Null und trug noch 40 solcher Theile auf das obere Ende des Halses. Für letztere (schwere Flüssigkeiten) belastete er zur Bestimmung des Nullpunctes das Instrument so, daß es im Wasser beinahe bis an das obere Ende des Halses einsank, während er einen zweiten Punct durch Eintauchen in eine Flüssigkeit fand, die aus einer Auflösung von 15 Theilen Kochsalz in 85 Theilen Wasser bestand. Diesen zweiten Punct bezeichnete er mit 15, theilte den Abstand zwischen diesem und jenem in 15 gleiche Theile und trug noch 70 solcher Theile auf das untere Ende des Halses.

Mit Hülfe der Formeln §. 216 lassen sich aus beiden Scalen leicht die entsprechenden spec. Gewichte ableiten, wenn man hierzu das spec. Gewicht der Salzlösungen genau bestimmt hat. Nach Francoeur*) finden zwischen dem spec. Gewichte s^1 und den Graden $n (= v^1 - v)$

folgende Gleichungen statt: $s^1 = \frac{152}{152 - n}$, für spec. schwerere Flüssigkeiten und $s^1 = \frac{146}{136 + n}$ für spec. leichtere Flüssigkeiten als Wasser.

Cartier's Aräometer unterscheidet sich von dem Baumé'schen nur durch die etwas größeren Scalentheile. Bez. C die Grade des ersten, B die des letzteren, so findet nach Francoeur die Gleichung statt: $16 C = 15 B + 22$.

Beck's Aräometer sollte zwei Fehler des Baumé'schen Aräometers beseitigen, nämlich die Anwendung einer Salzlösung von unbest. spec. Gewicht und die Ungleichheit der Bezeichnung des Punctes ein Mal mit Null, ein anderes Mal mit 10, bis zu welchem es im Wasser einsinkt.

*) Baumgartner in seinem, allen Technikern höchst empfehlenswerthen, Werkchen „Aräometrie für Chemisten und Technologen“ Wien 1820, hat mancherlei Tafeln berechnet, welche die Entwerfung solcher Scalen ungemein erleichtern.

*) Dictionnaire technologique Tome II. p. 114.

Beck bez. deshalb den Wasserpunct mit Null und den Punct, bis zu welchem das Instrument in eine Flüssigkeit von 0,850 spec. Gewichte einsinkt, mit 30, theilte den Abstand beider in 30 gleiche Theile, setzte die Scale über Null bis auf 70, unter Null bis auf 30 fort und vertheilte die ganze Scale über zwei Instrumente.*)

Nach Zenneck**) lassen sich die spec. Gewichte, welche den Graden des Beck'schen Aräometer entsprechen, durch die Formel berech-

nen: $s^1 = \frac{170}{170-n}$ für spec. schwereren und $s^1 = \frac{170}{170+n}$ für spec. leichteren Flüssigkeit als Wasser.

Mittels der angegebenen Formeln kann man leicht Tabellen berechnen, wonach für den gewöhnlichen technischen Gebrauch Baumé's wie Beck's Aräometer, immerhin zweckmäßige Instrumente genannt werden müssen, sobald dieselben sonst übereinstimmend angefertigt werden.

§. 218.

Specifisches Gewicht mit einander verbundener Körper.

Unter der Voraussetzung, daß bei der Verbindung der Körper eine Volumen-Änderung nicht eintritt, ermittelt man das spec. Gewicht der Zusammensetzung wie folgt.

Bezeichnen v_1 , v_2 und v_3 die Volumen der Bestandtheile, s_1 , s_2 und s_3 deren spec. Gewicht, so ist das $= s$ der Verbindung offenbar

$$\text{I. } s = \frac{s_1 v_1 + s_2 v_2 + s_3 v_3}{v_1 + v_2 + v_3}; \text{ oder, wenn statt der}$$

Volumen die respectiven Gewichte p_1 , p_2 und p_3 gegeben sind

$$\text{II. } s = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{p_1 s_1 s_2 + p_2 s_1 s_3 + p_3 s_1 s_2 \cdot s_1 s_2 s_3}.$$

Für den Fall, daß die Verbindung nur aus zwei verschiedenen Körpern besteht, deren Gesamtgewicht $P = p_1$

*) Der Uebelstand, wie bei Baumé, daß gleiche Zahlen des Beck'schen Aräometers sowohl eine Vergrößerung als eine Verminderung des spec. Gewichts anzeigen, ließe sich durch Einführung der relativen Zeichen + und - beseitigen, wie neuerdings Francoeur bei seinem hunderttheiligen Aräometer (Hülse's polytech. Centralblatt Jahrg. 1843. Bd. 1, S. 34.) gethan hat.

**) Baumgartner's Zeitschrift für Physik. Bd. 2, S. 244.

+ p_2 ist, lassen sich die Gewichte der Theile p_1 und p_2 berechnen. Man erhält nämlich aus vorstehenden Gleichungen:

$$p_1 = P \frac{s_1 (s_2 - s)}{s (s_2 - s_1)} \text{ und } p_2 = P \frac{s_2 (s - s_1)}{s (s_2 - s_1)}.$$

Verlangt man nun das Volumenverhältniß der beiden Theile zu kennen, so ergibt sich dieß aus I. zu $\frac{v_1}{v_2} =$

$$\frac{s - s_2}{s_1 - s}.$$

Die Voraussetzung, worauf vorstehende Formel beruht, gilt jedoch nur dann, wenn die Körper bloß mechanisch zusammengefügt sind, wie z. B. Schiffe, Schwimmer bei Dampfkesseln etc., nicht aber wenn dieselben chemische Verbindungen, im engeren oder weiteren Sinne, bilden, wie z. B. alle chemisch zusammengesetzten Stoffe, zusammengeschmolzene Metalle, Mischungen aus Alkohol und Wasser, Salzsohlen etc. Im letzteren Falle entsteht stets bei der Verbindung entweder eine Ausdehnung oder Zusammenziehung, wobei jedoch zur Zeit noch nicht völlig entschieden ist, nach welchen bestimmten Gesetzen solches erfolgt. *) Von den festen Körpern geben übrigens die Verbindungen von Silber mit Gold, Kupfer oder Zinn, so wie Zinn und Blei die geringsten Abweichungen.

§. 219.

Vorstehenden Paragraphen werde hier eine tabellari-
sche Zusammenstellung der spec. Gewichte solcher Körper
beigefügt, welche besonders für die techn. Mechanik von
Wichtigkeit sind. Hölzer sind dabei im lufttrocknen Zu-
stande angenommen. Vorausgesetzt ist eine mittlere Tem-
peratur von 15 bis 20° C. **)

*) Man sehe hierüber die Arbeit Kopp's „Ueber die Vorausbestimmung des spec. Gewichts chemischer Verbindungen“ in Poggendorf's Annalen Bd. 47 S. 133 und Karsten's „Philosophie der Chemie“ Berlin 1843. S. 282.

**) Die meisten dieser Angaben sind entweder der mechan. Technologie von Karmasrch entnommen, oder wir verdanken sie der persön-

I. Feste Körper.

Name der Körper.	Spec. Gewicht	
	Grenzen.	Mittelwerthe.
Ahornholz	0,645 — 0,750	0,697
Apfelbaumholz	0,639 — 0,793	0,716
Basalt	2,415 — 3,300	2,857
Birkenholz	0,734 — 0,793	0,763
Birnbaumholz	0,646 — 0,732	0,689
Blei (gegossen)	11,207 — 11,445	11,326
Buchenholz (Rothbuche)	0,690 — 0,852	0,771
Buchsbaumholz	0,912 — 1,031	0,971
Ebenholz (schwarz)	1,187 — 1,331	1,259
Eisen		
Stabeisen	7,352 — 7,912	7,600
Gusseisen (weiss)	7,080 — 7,889	7,500
- (grau)	6,635 — 7,650	7,100
- (halbirtes)	6,832 — 7,284	7,064
Erde		
sehr grobsandig	1,357 — 1,700	
fett mit Kieselerde gemengt	1,910 — 2,290	
Gartenerde	1,630 — 2,338	
Mergelerde	1,606 — 2,400	
Eschenholz	0,540 — 0,845	0,692
Feuerstein	2,581 — 2,594	2,587
Fichtenholz (Rothtanne)	0,408 — 0,698	0,558
Föhrenholz (Kiefernholz)	0,495 — 0,763	0,629
Gneifs	2,394 — 2,500	
Gold, gehämmert oder gewalzt	19,362 — 19,650	19,506
Granit	2,500 — 3,063	
Jacarandaholz	— — — — —	0,908
Kalkmörtel	1,638 — 1,859	
Kalkstein	2,456 — 2,837	
Kieselsteine, grob u. abgerundet	2,300 — 2,700	
Kirschbaumholz	0,682 — 0,715	0,698
Korkholz (Flaschenstöpsel)	— — — — —	0,240

lichen Güte des genannten Herrn; andere sind Böttcher's schätzbarem Werke „Tabellarische Uebersicht der spec. Gewichte der Körper“ Frankfurt a. M. 1837 entlehnt, auf welches wir zugleich, als das vollständigste und vertrauenswertheste seiner Art hiermit aufmerksam machen wollen; endlich noch anderen guten Werken über Baukunst.

Name der Körper.	Spec. Gewicht	
	Grenzen.	Mittelwerthe.
Kuhleder	—	1,327
Kupfer, gegossen		
blasig	7,720 — 8,132	7,826
dicht	8,586 — 8,907	8,746
geschmiedet	8,878 — 9,000	8,967
Draht	8,785 — 8,948	8,866
Lehm	1,516 — 1,664	
Lerchenbaumholz	0,473 — 0,565	0,519
Lindenbaumholz	0,559 — 0,604	0,581
Mahagonyholz	0,563 — 1,063	0,813
Marmor	2,516 — 2,854	
Mauerwerk, frisch		
Bruchsteine	2,123 — 2,460	
Ziegelsteine	1,554 — 1,870	
Schutt von altem	—	1,947
Messing		
gegossen	8,396 — 8,710	8,553
Blech	8,520 — 8,620	8,570
Draht	8,340 — 8,730	8,535
Mühlsteinquarz		
porös	1,242 — 1,285	
dicht	2,485 — 2,613	
Neusilber (Argentan)	8,400 — 8,700	8,650
Platin	20,857 — 21,740	21,298
Porphyr	2,675 — 2,793	
Roskastanienholz	0,551 — 0,610	0,580
Sand		
fein u. trocken	1,399 — 1,638	
- u. feucht	1,900 — 1,945	
grob	1,371 — 1,485	
Sandstein	1,900 — 2,699	
Silber, rein	10,10 — 10,40	10,25
gewalzt oder gehämmert	10,50 — 10,70	10,60
Stahl		
Cementstahl	7,255 — 7,798	
gefrischt	7,500 — 7,813	
gegossen	7,826 — 7,919	
Steingrand	2,701 — 2,731	
Steinkohle	1,210 — 1,331	
Tannenholz (Weifstanne)	0,498 — 0,746	0,622

Name der Körper.	Spec. Gewicht	
	Grenzen.	Mittelwerthe.
Tombak		
Draht oder Blech	8,788 — 9,00	8,894
Thon, Töpfer-	1,800 — 2,085	1,942
- Schiefer-	2,670 — 3,500	3,085
Ulmenbaumholz	0,568 — 0,671	0,619
Wachs, (Bienen) gelbes		0,962
- weisses		0,966
Weide	0,392 — 0,530	0,461
Weißbuche (Hainb.)	0,728 — 0,790	0,759
Ziegelstein		
gemeiner	1,400 — 2,200	1,800
Klinker	1,520 — 2,290	1,905
Zink		
geschmolzen	6,862 — 7,239	7,050
gewalzt	7,215 — 7,861	7,538
Zinn		
rein	7,290 — 7,473	7,331

II. Flüssige Körper.

Name der Körper.	Spec. Gewicht	
	Grenzen.	Mittelwerthe.
Leinöl	0,929 — 0,953	0,941
Meerwasser	1,024 — 1,029	1,026
Olivenöl		
gewöhl. Baumöl	0,913 — 0,919	0,916
feines Provenceröl	0,905 — 0,917	0,911
Rüböl, gewöhl.	0,912 — 0,919	0,915
- raffinirt		0,915
Quecksilber	13,550 — 13,575	13,562
- bei 0° Temperatur gegen Wasser bei 0°		13,598

Zusatz - Kapitel.

Ausdehnung der Körper durch die Wärme.

§. 220.

Der Erfahrung nach dehnen sich alle Körper beim Erwärmen aus und ziehen sich beim Erkalten zusammen. Die Gröfse der Ausdehnung und Zusammenziehung, für eine bestimmte Temperatur, ist dabei hauptsächlich von dem Aggregatzustande der Körper abhängig, nämlich kleiner bei festen als bei wasserförmigen, und bei luftförmigen gröfser als bei jenen beiden. Dehnen sich aber feste und flüssige Körper durch die Wärme nicht nach einerlei Verhältnifs aus, so folgt zunächst in Bezug auf die Sätze der letzteren §§. des vorigen Kapitels, dafs dieselben auch bei verschiedenen Temperaturen verschiedene spec. Gewichte haben und somit die früheren desfallsigen Bestimmungen eine entsprechende Correction erfahren müssen.

Hat man auch bei gewöhnlichen technischen Untersuchungen nicht gerade nöthig, in aller Strenge hierauf Rücksicht zu nehmen, indem daselbst die Annahme einer mittleren Temperatur gewöhnlich ausreicht, so eignet sich das nähere Eingehen auf diesen Gegenstand doch in so fern für uns, als wir dabei eine passende Veranlassung finden, andere für den Techniker wichtige Fragen in Betracht zu ziehen.

Wir handeln daher zuerst von der Ausdehnung der Körper im Allgemeinen und kommen sodann (gelegentlich) auf den Temperatureinflufs bei der Bestimmung spec. Gewichte zurück.

Auf der Ausdehnung der Körper durch die Wärme beruhen auch die gewöhnlichen Instrumente (Thermometer), welche man zum Messen der Temperatur verwendet, deren Einrichtung, Verfertigung u. s. w. jedoch hier als bekannt vorausgesetzt werden mufs. *)

*) Nicht unangemessen möchte die Angabe folgender Gleichung sein. Bezeichnet R eine beliebige Anzahl Grade nach Réaumur, C u. F

§. 221.

Ausdehnung fester Körper durch die Wärme.

Auch die Ausdehnung fester Körper unter sich steht streng genommen in keinem constanten Verhältniß zu den Temperaturveränderungen, so daß sich z. B. Kupfer, Eisen, Platin, Glas von 0° bis 300° C mehr als dreimal so stark ausdehnen als solches von 0° bis 100° C. der Fall ist. Innerhalb der letztgedachten Grenzen ist indess der Unterschied so gering, daß die Ausdehnung geradezu der Wärmezunahme proportional gesetzt werden kann.

Aehnlich verhält es sich mit der Frage, ob sich die festen Körper durch die Wärme nach allen drei Dimensionen des Raumes hin um gleich viel ausdehnen, oder nicht. Nach den bisherigen Erfahrungen hierüber, möchte anzunehmen sein, daß ersteres stets dann erfolgt, wenn die Theile (Atome) eines Körpers nach allen Richtungen gleich angeordnet sind, letzteres aber, wenn diese Anordnung nach verschiedenen Richtungen ebenfalls verschieden ist. *)

Bei festen Körpern, wo man die Ausdehnung nach allen Seiten hin gleich groß voraussetzen kann, muß sich aus der Verlängerung nach einer Dimension (der linearen Ausdehnung) die nach zwei oder drei Dimensionen (die kubische Ausdehnung) ohne Weiteres ableiten lassen.

Aus letzterem Grunde ermittelte man bisher, durch Versuche, gewöhnlich nur die lineare Ausdehnung fester Körper, wobei die hierzu angewandten Methoden, im Allgemeinen, in den sorgfältigsten (mikrometrischen) Messungen der Verlängerungen bestanden, welche Stangen, aus den betreffenden Körpern gebildet, bei verschiedenen

respective die correspondirenden nach Celsius und Fahrenheit, so ist

$$R = \frac{4}{5} C = \frac{4}{5} (F - 32); \quad C = \frac{5}{4} R = \frac{5}{4} (F - 32);$$

$$F = \frac{9}{4} R + 32 = \frac{9}{5} C + 32.$$

*) Vollständig erwiesen ist diese Annahme bei den Krystallen, wo man bestimmt weiß, daß sich nur diejenigen nach allen Richtungen gleichmäßig ausdehnen, welche zum regelmäßigen Systeme gehören und keine doppelte Strahlenbrechung zeigen.

Temperaturen erfuhren. Ausnahmen hiervon machen allein die Versuche von Dulong und Petit, welche unmittelbar die Ermittlung der kubischen Ausdehnung fester Körper zur Absicht hatten. *)

§. 222.

Bezeichnet man, unter vorgenannten Voraussetzungen, die Ausdehnung der Längeneinheit eines Körpers von 0^0 bis $100^0 C$ mit a und ebenso die Ausdehnung, welche einem einzigen Grad C entspricht (die eigenthümliche oder spezifische Längenausdehnung) mit e , so ist $e = \frac{a}{100}$ zu setzen.

Sind daher L_0 und L die Längen eines Körpers respective bei 0^0 und $t^0 C$, so ist offenbar

$$1) \quad L = L_0 + e \cdot L_0 t = L_0 (1 + et)$$

ebenso für einen Körper desselben Stoffes, welcher bei der Temperatur A , die Länge L , besitzt

$$L_1 = L_0 (1 + et_1), \text{ woraus}$$

$$\frac{L_1}{L} = \frac{1 + et_1}{1 + et}, \text{ oder genau genug}$$

$$2) \quad L_1 = L \{ 1 + e(t_1 - t) \} \text{ folgt.}$$

Bezeichnen F und F_1 Flächen von Körpern gleichen Stoffes,

so ist nach geometrischen Gründen zu setzen: $\frac{F_1}{F} = \frac{L_1^2}{L^2}$, daher

$$\frac{F_1}{F} = \frac{(1 + et_1)^2}{(1 + et)^2}, \text{ oder ebenfalls hinlänglich genau}$$

$$3) \quad F_1 = F \{ 1 + 2e(t_1 - t) \}$$

Sind endlich V und V_1 die Volumen gedachter Körper,

so erhält man, wegen $\frac{V_1}{V} = \frac{L_1^3}{L^3}$,

$$4) \quad V_1 = V \{ 1 + 3e(t_1 - t) \}; \text{ oder, wenn}$$

man hier die Ausdehnung der Kubikeinheit, d. i. $3e = K$ setzt,

$$5) \quad V_1 = V \{ 1 + K(t_1 - t) \}$$

*) Ausführlich und zugleich durch treffliche Abbildungen erläutert, handelt hierüber die bereits citirte Physik von Pouillet Bd. 1. S. 214.

§. 223.

Von den Resultaten der in §. 221 gedachten Messungen stellen wir die Ausdehnungen der für die Mechanik wichtigen festen Körper in folgender Tabelle zusammen.

Die Länge der Körper ist bei $0^{\circ} C = 1$ gesetzt.

Name der Körper.	Ausdehnung von 0° bis $100^{\circ} C$. ($a. = 100. e$)		Beobachter.
Blei	0,002719	$\frac{1}{367}$	Morveau.
-	0,002848	$\frac{1}{351}$	Lavoisier u. Laplace.
-	0,003086	$\frac{1}{324}$	Berthoud.
Bronze	0,001817	$\frac{1}{550}$	Smeaton.
Eisen, Stab	0,001167	$\frac{1}{857}$	Bessel.
- -	0,001182	$\frac{1}{846}$	Dulong u. Petit.
- -	0,001235	$\frac{1}{812}$	Lavoisier u. Laplace.
- Draht	0,001440	$\frac{1}{694}$	Troughton.
- Guß	0,001071	$\frac{1}{933}$	Daniell.
- -	0,001109	$\frac{1}{901}$	Roy.
Glas, weißes	0,000862	$\frac{1}{1161}$	Dulong u. Petit.
- -	0,000944	$\frac{1}{1059}$	Herbert.
- Röhren*)	0,000921	$\frac{1}{1085}$	Horner.
- -	0,000776	$\frac{1}{1288}$	Roy.
Gold, feines (de départ)	0,001466	$\frac{1}{682}$	Lavoisier u. Laplace.
Granit	0,000789	$\frac{1}{1267}$	Adie.
-	0,000868	$\frac{1}{1152}$	Bartlett.
Hartloth (2 Kupfer u. 1 Zink)	0,002058	$\frac{1}{486}$	Smeaton.
Kupfer	0,001718	$\frac{1}{582}$	Dulong u. Pet.
-	0,001918	$\frac{1}{521}$	Troughton.
Marmor, weißer (canarisch)	0,001072	$\frac{1}{932}$	Dunn u. Sang.
- schwarzer	0,000426	$\frac{1}{2374}$	-
Messing, gegossen	0,001875	$\frac{1}{533}$	Smeaton.
- 0,25 Zink u. 0,75 Kupfer	0,002144	$\frac{1}{466}$	Daniell.
- gewalzt (Tafel)	0,001920	$\frac{1}{510}$	Stampfer.
- Draht	0,001885	$\frac{1}{530}$	Herbert.
Platin	0,000884	$\frac{1}{1131}$	Dulong u. Petit.

*) Nach Hallström gilt für die lineare Ausdehnung von Röhren aus Kaliglas folgende Formel (die Temperatur in C. Graden)

$$L = 1 + 0,00000196 t + 0,00000105 t^2.$$

Name der Körper.	Ausdehnung von 0° bis 100° C. ($\alpha = 100 \cdot e$)		Beobachter.
Sandstein	0,001174	$\frac{1}{851}$	Adie.
-	0,001716	$\frac{1}{582}$	Bartlett.
Silber	0,002083	$\frac{1}{480}$	Troughton.
- (Kapellen)	0,001909	$\frac{1}{524}$	Lavoisier u. Laplace.
Stahl, Hundsmann'scher .	0,001074	$\frac{1}{931}$	Horner.
- Fischerscher . . .	0,001112	$\frac{1}{899}$	-
- Steyerscher . . .	0,001192	$\frac{1}{868}$	-
- gehärteter	0,001225	$\frac{1}{816}$	Smeaton.
- b. 30° angelassen .	0,001369	$\frac{1}{730}$	Lavoisier u. Laplace.
- b. 65°	0,001239	$\frac{1}{807}$	-
- weicher	0,001079	$\frac{1}{925}$	-
Stein (zum Bau) v. St. Pernon	0,000430	$\frac{1}{2304}$	Destigny.
- von St. Leu	0,000649	$\frac{1}{1541}$	-
Weichloth (1 Zinn u. 2 Blei)	0,002505	$\frac{1}{399}$	Smeaton.
Weißtanne (faserig) .	0,000352	$\frac{1}{2841}$	Struve.
-	0,000408	$\frac{1}{2451}$	Kater.
Ziegelstein (gewöhnlich)	0,000550	$\frac{1}{1818}$	Adie.
Zink, gegossen	0,002968	$\frac{1}{337}$	Horner.
- gewalzt	0,003331	$\frac{1}{300}$	Bessel.

Die ungewöhnliche Abweichung mancher dieser Angaben für ein und dasselbe Material, rührt theils von Beobachtungsfehlern, vorzüglich aber (wie bei den Festigkeitscoefficienten und den specifischen Gewichten) von der natürlichen Verschiedenheit der chemischen und physikalischen Zustände der Körper her. Bei sehr sorgfältigen Untersuchungen, z. B. bei größeren geodätischen Vermessungen, Pendelversuchen u. s. w. sieht man sich daher gewöhnlich genöthigt, eigene desfallsige Versuche anzustellen.

§. 224.

Ausdehnung nicht zusammendrückbar flüssiger Körper durch die Wärme.

Obwohl für alle flüssigen Körper erwiesen ist, daß sie sich durch die Wärme nach allen Seiten hin völlig

gleichmäfsig ausdehnen, so lag es doch in der Natur der Sache, dafs sich alle deshalb angestellten Versuche nur auf ihre kubische Ausdehnung beziehen konnten. Auf die Angabe der dabei angewandten Methoden können wir ebenfalls nicht eingehen und verweisen deshalb wieder besonders auf Pouillet's Physik Bd. 1. S. 223. Bemerkt mag nur noch werden, dafs in dem Nachstehenden allein die (absolute) wahre Ausdehnung der Flüssigkeit in Betracht gezogen ist, d. h. diejenige, welche man beobachten würde, wenn sich das Gefäfs, der Behälter der Flüssigkeit, durchaus nicht ausdehnte.

Bei den nicht zusammendrückbar flüssigen Körpern tritt die vorher erwähnte Ungleichförmigkeit der Ausdehnung im Verhältnisse zur Temperatur am meisten hervor und zwar um so bedeutender, je mehr sich die Temperatur dem Punkte nähert, wo die Flüssigkeiten ihren Aggregatzustand ändern.*).

Am wenigsten ungleichförmig unter allen genannten Flüssigkeiten dehnt sich Quecksilber aus, so dafs man die Ausdehnung desselben, zwischen 0° und $100^{\circ} C$ als (beinahe) gleichförmig betrachten kann. Nach den sorgfältigen Versuchen von Dulong und Petit beträgt die kubische Ausdehnung des Quecksilbers für die Temperaturerhöhung von 0° bis $100^{\circ} C$: $\frac{1}{55,50} = 0,018018$, oder für jeden Grad C : $\frac{1}{5550} = 0,00018018$.

Nächst dem Quecksilber zeigen, innerhalb der Grenzen 0° und $100^{\circ} C$, die fetten Oele die wenigste, alle übrigen Flüssigkeiten aber, wie Wasser, Alkohol, Salzlösungen u. s. w., eine um so bedeutendere ungleichförmige Ausdehnung. Für unseren Zweck beschränken wir uns indess darauf, die neuesten Ergebnisse über die kubische Ausdehnung des reinen Wassers hier noch aufzuführen.

Nach Hallström, gestützt auf eigene Versuche, so wie

*) Die Analogie läfst wohl vermuthen, dafs sich ein ähnliches Verhalten auch bei der Ausdehnung fester Körper zeigen würde, wenn man sie bis zum Schmelzpunkte erhitzte.

auf die von Munke und Stampfer, läßt sich das Volumen des reinen Wassers, solches bei der Temperatur von $0^{\circ} C = 1$ gesetzt, durch folgende Gleichungen ausdrücken:*)

Für Temperaturen von 0° bis $30^{\circ} C$.

$$V = 1 - 0,000057590 t + 0,0000075611 t^2 - 0,00000003510 t^3$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich überdies, daß das reine Wasser sein kleinstes Volumen und mithin sein größtes spec. Gewicht bei $+ 3,92^{\circ} C$ besitzt, für welchen letzteren Werth ohne besonderen Fehler $+ 4^{\circ} C$ gesetzt werden kann und wonach sich unsere Annahme §. 25. erklärt.**)

Für Temperaturen von 30° bis $100^{\circ} C$,

$$V = 1 - 0,0000094178 t + 0,00000533661 t^2 - 0,0000000104086 t^3$$

Nach diesen Gleichungen läßt sich folgende Tabelle berechnen:

t°	V	$\frac{1}{V} = s$	t	V	$\frac{1}{V} = s$
0°	1,000000	1,000000	30	1,004216	0,995802
1°	0,999950	1,000050	40	1,007496	0,992560
2	0,999915	1,000080	50	1,011570	0,988563
3	0,999894	1,000106	60	1,016398	0,983867
3,9	0,999882	1,000118	70	1,021920	0,978550
5	0,999897	1,000103	80	1,028072	0,972695
10	1,000145	0,999855	90	1,034791	0,966379
20	1,001594	0,998408	100	1,042016	0,959678

§. 225.

Für die Anwendung vorstehender Sätze folgen hier einige Aufgaben.

Aufgabe 1. Das spec. Gewicht eines Körpers ist bei der Temperatur $t = 20^{\circ} C$ gegen Wasser $= 1$ von

*) Gehler's physik. Wörterbuch, Artikel „Wärme“ S. 913.

**) Von 0° bis $3,92^{\circ} C$ dehnt sich das Wasser gar nicht aus, beharrt in diesem Zustande oder zieht sich zusammen.

derselben Temperatur bestimmt und $= m$ gefunden; es fragt sich wie groß dasselbe bei 0^0 Temperatur sein wird?

Auflösung. Es mögen S und S^1 die spec. Gewichte zweier verschiedener Körper bei Null Grad Wärme und s, s^1 bei einerlei Temperatur $= t$ bezeichnen; ferner V, V^1 und v, v^1 die respectiven Volumen, so wie K, K^1 die ausgedehnten Volumeneinheiten.

Sodann ist $v = kV, v_1 = K_1 V_1$ und wegen $v = \frac{VS}{s}$ und $v^1 = \frac{V_1 S_1}{s^1}, S = Ks, S^1 = K^1 s^1$. Durch Division und Reduction erhält man aber aus letzteren beiden Gleichungen

$$S^1 = \frac{K^1}{K} \cdot \frac{s^1}{s} \cdot S$$

Setzen wir nun für unseren Fall $S = 1$, so ist $\frac{s^1}{s} = m$ und daher

$$S^1 = \frac{K_1}{K} \cdot m = \frac{(1 + 3et) m}{K}$$

Nach der Tabelle des vorigen §. ist aber für $t = 20^0$ $\frac{1}{K} = 0,998408$, folglich

$$S^1 = 0,998408 (1 + 3 e. t.) m.$$

Aufgabe 2. Die Höhe einer in einem genau cylindrischen Glasgefäße befindlichen Quecksilbermasse ist mit Hülfe einer geeigneten Messingscale, bei der Temperatur t zu h gefunden; es fragt sich, wie groß gedachte Höhe bei 0^0 Temperatur ist, wenn zugleich auf die Ausdehnung der Scale Rücksicht genommen wird.

Auflösung. Bezeichnet K die kubische Ausdehnung des Quecksilbers für jeden Grad C und h^1 die Höhe dieser Flüssigkeit bei Null-Grad-Temperatur ohne Rücksicht auf die Ausdehnung der Scale, so ist zuerst nach §. 222.

$$h = h^1 (1 + k t) \text{ und genau genug: } h^1 = h (1 - k t)$$

Geschah die Theilung der Scale bei der Temperatur t^1 und bezeichnet e die eigenthümliche Ausdehnung des

Messings, so ist die wahre Länge der Scale bei $t_1 := h \{ 1 - e(t - t^1) \}$ und folglich mit Rücksicht auf beide Correctionen, die Höhe der auf Null Grad Temperatur reduc. Quecksilbersäule:

$$h^1 = h (1 - k t) \{ 1 - e(t - t^1) \}$$

Aufgabe 3. Eine schmiedeeiserne Stange von 5^m,5 Länge, 0^m,06 Breite und 0^m,03 Dicke, wurde bei der Temperatur + 18° C mit beiden Enden in zwei unverrückbare Ständer befestigt; man soll die Kraft bestimmen, womit die Stange bei einer Temperaturerniedrigung bis zu - 20°, vermöge des Bestrebens der Zusammenziehung, gegen gedachte Ständer wirkt.

Auflösung. Nimmt man aus der Tabelle §. 223 für Schmiedeeisen die Mittelzahl $\alpha = 0,0012$, also $e = 0,000012$, so würde sich bei der Temperatur-Differenz von 38° C. die freiliegende Stange für jeden Meter ihrer Länge um $0,000012 \times 38 = 0^m,000456$ verkürzen. Da aber letzteres durch die Befestigung der Enden in den Ständern verhindert wird, so müssen diese von einer verhältnißmäßigen Zugkraft angeregt werden, die sich mit Hülfe der Gleichung I. §. 86 berechnen läßt. Man erhält nämlich $Q = \frac{\alpha}{L} \cdot E \cdot A$ und, da in unserem Falle $\frac{\alpha}{L} = 0,000456$, $A = 1800$ und E . (nach Tabelle §. 87) $= 20000$ ist, so folgt $Q = 0,000456 \cdot 20000 \cdot 1800 = 16416$ Kil.

Hieraus erkennt man zugleich, wie wichtig es ist, bei Metallconstructions, Röhrenleitungen, den Schienen der Eisenbahnen, Dampfhähnen und Kolben u. s. w. auf die möglichen Verlängerungen und Verkürzungen Rücksicht zu nehmen, welchen diese bei Temperaturveränderungen unterworfen sind.

§. 226.

Von der Ungleichheit, mit welcher sich Körper von verschiedenem Stoffe bei gleicher Temperaturveränderung ausdehnen, macht man eine höchst vortheilhafte Anwendung

auf die Construction der Uhrpendelcompensationen, worunter man Vorrichtungen versteht, welche dem Einflusse von Wärme und Kälte auf die Längenveränderung der Pendel entgegenwirken. Die Nothwendigkeit einer constanten Länge des Pendels, wenn solches seine Schwingungen stets in gleicher Zeit verrichten soll, erhellt vollständig aus dem Früheren.

Wir betrachten hier nur zwei der bemerkenswerthesten Compensationen, nämlich die sogenannte Rost- und die Quecksilber-Compensation. Eine gebräuchliche Anordnung erster

Fig. 144. Art (ein Rostpendel) zeigt *Fig. 144.* Dabei stellt *mn* das gewöhnliche Stück Uhrfeder dar, woran das Pendel *mq* aufgehangen ist, *no* eine kurze Eisenstange und *AB*, *CD* zwei andere Eisenstangen, welche durch Querstäbe *AC* und *BD* mit einander zu einem unveränderlichen Rechteck verbunden sind. *αβ* und *γδ* sind Zinkstangen, welche mit ihren unteren Enden auf dem Querstabe *BD* unverrückbar befestigt, an den oberen Enden durch den Querstab *EF* vereinigt sind, wobei indess die Enden von *EF* mit *AB* und *CD* nicht fest verbunden, sondern daselbst in gehörigen Nuthen oder Schlitten verschiebbar sind. An dem Querstabe *EF* ist ferner die eiserne Stange *pq* befestigt, welche durch *BD*, vermöge einer hier vorhandenen Oeffnung, frei hindurch geht und in ihrer Fortsetzung die Linse *r* trägt.

Leicht wird man hiernach begreifen, wie bei der Ausdehnung der Eisenstäbe nach unten, vermöge der gleichzeitigen aber gröfseren der Zinkstäbe nach oben die erforderliche Compensation erreicht werden kann, sobald man die Längen der letzteren zu jenen der ersteren entsprechend anordnet.

Um letzteres durch Rechnung zu ermitteln, sei $mr = L$ die Entfernung des Schwingungspunktes vom Aufhänge-

punkte m des Pendels, bei einer bestimmten Temperatur, und dabei ferner $mo = a$, $AB = CD = b$, $pr = c$ und x die zu bestimmende Länge $\alpha\beta = \gamma\delta$. Sodann ist

$$1) L = a + b + c - x.$$

Bezeichnet daher e die eigenthümliche Längenausdehnung des Eisens, e^1 die des Zinkes, so ist für eine um t Grade höhere oder niedrigere Temperatur

$$2) L^1 = (a + b + c) (1 \pm et) - x (1 \pm e^1 t)$$

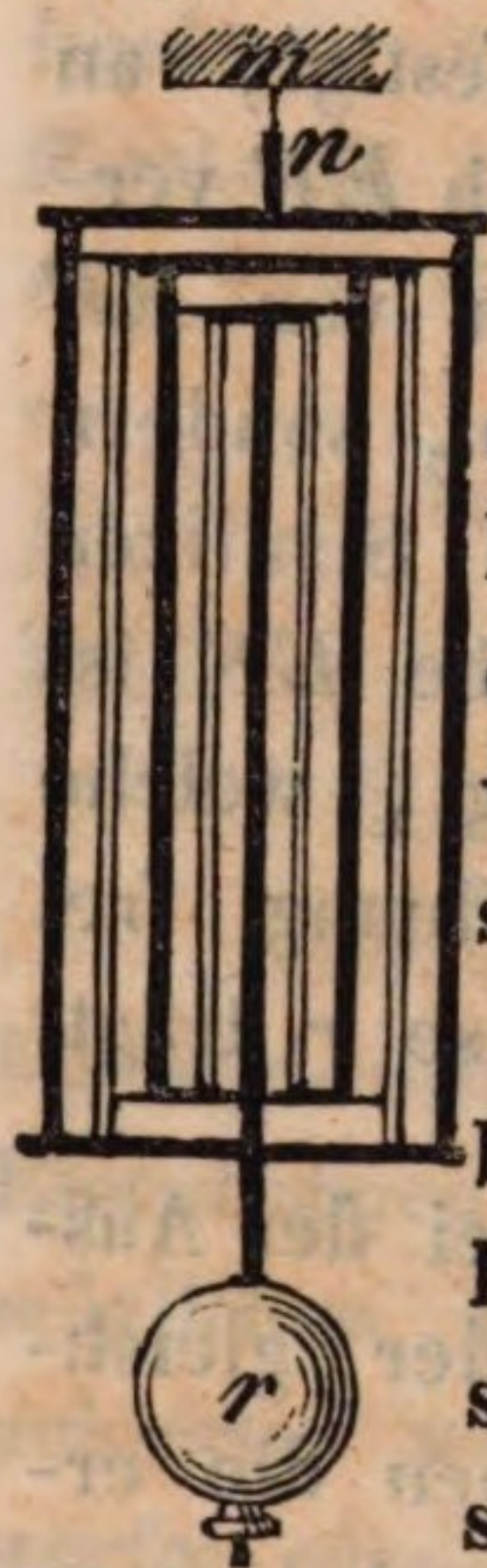
Der Anforderung gemäß soll aber $L = L^1$ sein, daher erhält man als Bedingungsgleichung

$$3) 0 = (a + b + c) e - x e^1, \text{ oder nach 1)}$$

$$0 = (L - x) e - x e^1, \text{ woraus folgt}$$

$$I. x = \frac{e}{e^1 - e} L.$$

Wollte man bei vorbemerakter Anordnung des Rostes die Zinkstäbe durch Messingstäbe ersetzen, so würde sich Fig. 145. nach I., wegen der geringeren Ausdehnung des Messings, zeigen, daß die Messingstäbe länger als das Pendel selbst genommen werden müßten, was begreiflicher Weise unthunlich wäre. Um daher genanntes Metall in Anwendung bringen zu können, hat man irgend eine andere Einrichtung des Rostes, z. B. die Fig. 145 zu wählen, wobei wie vorher, das Eisen durch dunklere, das Messing durch hellere Linien angedeutet ist.



Werden sodann die vorigen Bezeichnungen beibehalten und die Länge eines jeden der neu hinzugekommenen gleichen Eisenstäbe und Messingstäbe respective durch b^1 und x^1 ausgedrückt, so erhält man wieder

$$L = (a + b + b^1 + c) - (x + x^1), \text{ so wie}$$

$$L^1 = (a + b + b^1 + c) (1 \pm et) - (x + x^1) (1 \pm e_2 t),$$

wo e_2 die eigenthümliche Längenausdehnung des Messings bezeichnet.

Aus letzteren beiden Gleichungen folgt sodann:

$$4) 0 = (a + b + b^1 + c) e - (x + x^1) e_2 \text{ und}$$

$$\text{II. } x + x^1 = \frac{e}{e_2 - e} \cdot L.$$

Aus den Bedingungsgleichungen 3) und 4) erhält man zugleich den allgemeinen Satz für die Compensation:

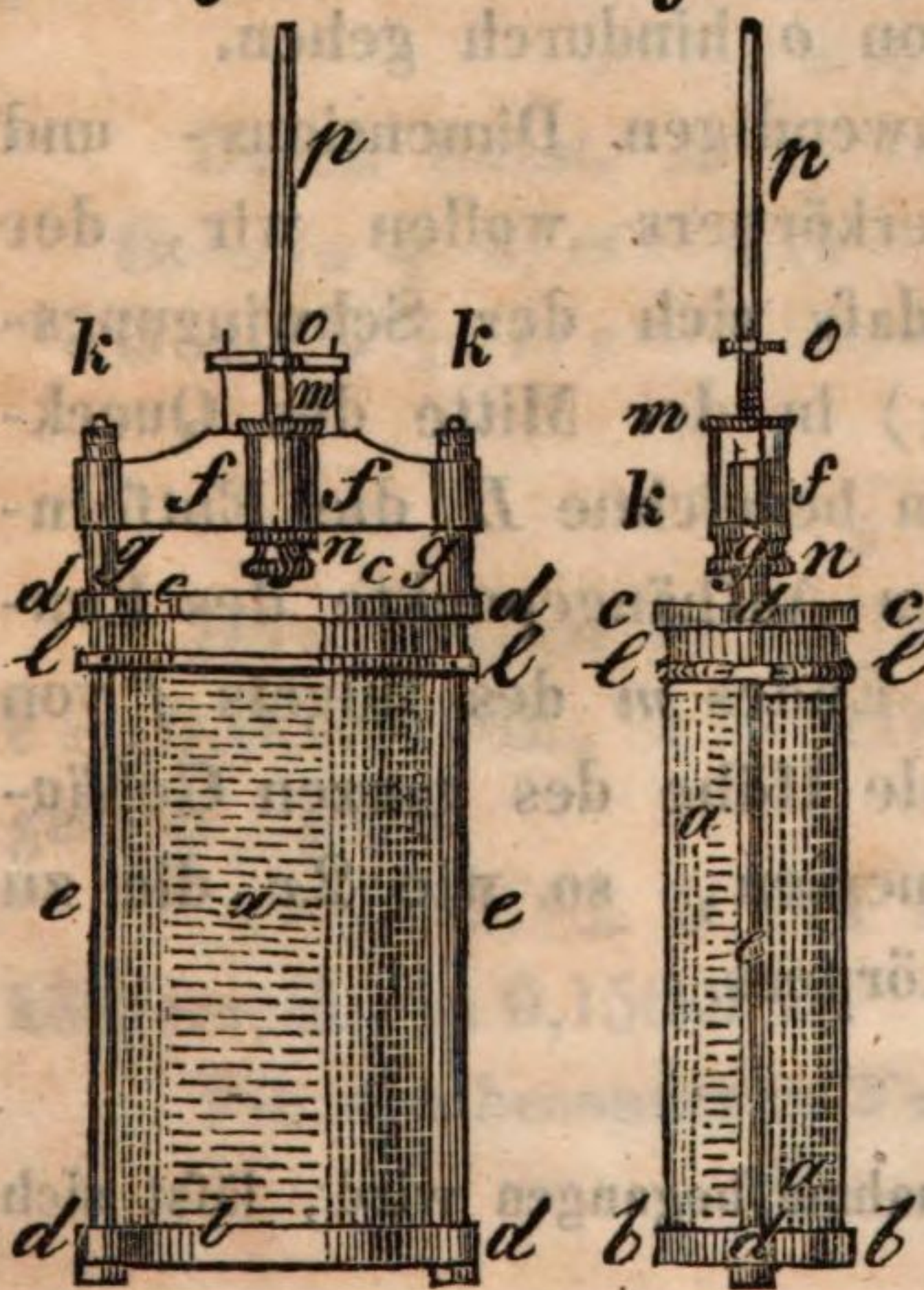
Die Gesamtlänge der vertikalen Stäbe des gegebenen Metalles verhält sich zur Gesamtlänge des compensirenden Metalles umgekehrt, wie die zugehörigen linearen Ausdehnungen.

§. 227.

Eine der einfachsten Compensationen läßt sich mit Anwendung von Quecksilber herstellen (Quecksilberpendel), indem man nämlich an der Pendelstange, statt der Linse, ein mit Quecksilber gefülltes Gefäß (gewöhnlich aus Glas) anbringt. Senkt sich hierbei die Pendelstange, so steigt das Quecksilber auf eine grössere Höhe, und bei gehöriger Anordnung läßt es sich leicht erreichen, dafs hierdurch der Schwingungspunkt eben so viel gehoben wird, als er sich durch die Verlängerung der Pendelstange senkt. Zugleich bietet diese Compensation den Vortheil, dafs sich ein damit versehenes Pendel sehr dem einfachen Pendel nähert,

Fig. 146.

Fig. 147. da die Masse der Stange im Verhältnifs zu der des Quecksilbers sehr gering ist.



Das Specielle der Anordnung eines Quecksilberpendels zeigt Fig. 146 in der Vorder- und Fig. 147 in der Seiten-Ansicht, wobei wohl kaum bemerkt zu werden braucht, dafs die Pendelstange verkürzt gezeichnet ist.

Zur Aufnahme des Quecksilbergefäßes *a* und respective zur Verbindung desselben mit der Pendelstange *p* dient ein steig-

bügel förmiges Gehäuse bcf . Es besteht dieß aus den Messingtellern b und c , wovon ersterer als Boden, letzterer als Deckplatte dient. An jedem dieser Teller befinden sich zwei Lappen dd , wovon die bei b zur Befestigung (mittels Nieten oder Schrauben) der unteren Enden zweier eisernen Tragstangen ee dienen, während die Lappen des Tellers c , gedachte Stangen frei hindurchlassen. Oberhalb werden die Stangen ee von den Enden eines Bügels f umfaßt, wobei die Hülsen oder röhrenförmigen Fortsetzungen gg derselben, gleichzeitig zum gehörigen Aufdrücken des Tellers c benutzt werden; die Feststellung der gedachten Verbindung wird durch Muttern und Gegenmuttern k bewirkt. Um endlich dem Ganzen möglichst viel Stabilität zu geben, ist noch ein zweitheiliger durch Nieten vereinigter Ring ll angebracht. Hinsichtlich der Verbindung der Pendelstange p mit dem Bügel f wird nur zu bemerken sein, daß von den beiden Schraubenmutter m und n die letztere zugleich als weiteres Regulierungsmittel für den Gang der Uhr dient, und zu diesem Ende auf ihrem Rande eine Theilung befindlich ist, n also überhaupt eine Mikrometerschraube bildet. Um bei einer solchen Regulirung die Drehung der Pendelstange zu verhindern, ist an dieser das metallene Querstück o befestigt, an dem Bügel f aber zwei Drähte, welche frei durch die Enden von o hindurch gehen.

Zur Berechnung der nothwendigen Dimensions- und Gewichts-Größe des Quecksilberkörpers wollen wir, der Einfachheit wegen annehmen, daß sich der Schwingungspunkt des Pendels (nahe genug) in der Mitte des Quecksilberkörpers befindet. *) Sodann bezeichne L die Entfernung des Schwingungspunktes vom Aufhängepunkte des Pendels, a den Abstand des oberen Endes m des Bügels f von demselben Punkte, b die vertikale Höhe des ganzen Gehäuses von m bis zur Platte b gemessen, so wie $2x$ die zu suchende Höhe des Quecksilberkörpers.

*) Welcher Fehler bei dieser Annahme begangen wird, läßt sich leicht nach §. 175 abschätzen.

Für die bestimmte Temperatur, wobei letztere Gröfsen gemessen sind, erhält man

$$1) L = a + b - x$$

Für eine um t Grad höhere Temperatur dagegen, wenn e die eigenthümliche Längen-Ausdehnung des Eisens, und $2x^1$ die verhältnismäfsig veränderte Höhe des Quecksilberkörpers bezeichnet

$$2) L^1 = (a + b)(1 + et) - x^1$$

Wie früher mufs aber auch hier $L = L^1$ sein, weshalb aus 1) und 2) folgt

$$3) 0 = (a + b)et + x - x^1$$

Um zunächst x^1 zu finden, sei v das Quecksilbervolumen bei der vorherbemerkten Normaltemperatur, k die eigenthümliche kubische Ausdehnung dieser Flüssigkeit, r der innere Halbmesser des auf einen Kreiscylinder reducirten Querschnittes vom Glasgefäfs, und e^1 die eigenthümliche lineare Ausdehnung des Glases. Sodann ist anfänglich

$$4) v = r^2 \pi \cdot 2x, \text{ nachher aber}$$

$$5) v(1 + kt) = \pi r^2 (1 + e^1 t)^2 2x^1,$$

Dividirt man 5) durch 4), so ergibt sich

$$(1 + kt) = \frac{(1 + e^1 t)^2 x^1}{x}, \text{ woraus für } x^1 \text{ der an-}$$

genäherte, hinlänglich genaue Werth zu reduciren ist:

$$x^1 = x + x(k - 2e^1)t$$

Durch Subst. in 3) erhält man daher

$$0 = (a + b)et - x(k - 2e^1)t \text{ und in Bezug auf (1)}$$

$$0 = (L + x)e - x(k - 2e^1), \text{ demnach}$$

$$x = \frac{e}{k - 2e^1 - e} \cdot L$$

Hier endlich nach Dulong und Petit, zufolge §. 223 $e = 0,00001182$, $k = 0,00018018$ und $e^1 = 0,000008613$ gesetzt, giebt

$$x = 0,0782 \cdot L \text{ und die ganze Höhe des Quecksilberkörpers } 2x = 0,1564 \cdot L$$

Für den besonderen Fall, dafs $L = 0^m,9935$, ist sonach

$$2x = 0^m, 1554.$$

Nimmt man hierbei den Querschnitt des Gefäßes = 0,002 Quad. Meter und Quecksilber von spec. Gewichte = 13,560 an, so erhält man für das Gewicht = Q des Quecksilbers:

$$Q = 1000 \cdot 13,56 \cdot 0,002 \cdot 0,1554 = 4,214 \text{ Kil.}$$

Eine nach solcher Berechnung angeordnete Quecksilbercompensation macht indess, für einen sehr genauen Gang der betreffenden Uhr, immer noch das Anbringen anderweitiger Regulierungsmittel nothwendig (in Fig. 146 die Mikrometerschraube n), was allein schon aus unserer Annahme von ganz bestimmten Ausdehnungscoefficienten erklärbar ist.

In Betreff anderer Compensations- und Regulierungsmethoden muß auf ausführlichere Werke über diese Gegenstände verwiesen werden. *)

*) Gehler's Wörterbuch, Artikel „Compensation“ und „Pendel“. Ganz besonders empfehlenswerth für Praktiker ist Jürgen's Werk: Die höhere Uhrmacherkunst“ Kopenhagen, 1842.

Berichtigung zur zweiten Abtheilung.

§. 152. fehlt die Bemerkung, daß der daselbst bewiesene Satz nur für Körper gilt, deren Masse auf beiden Seiten von der Drehungsebene des Schwerpunktes symmetrisch vertheilt ist.

Berichtigung zur dritten Abtheilung.

Seite 295 Zeile 17 v. unten ist „mithin“ statt „mithin das etc.“ zu setzen.

„ 319 „ 15 v. oben ist zu lesen: „wobei die Wände des letzteren etc.“ statt „wobei letztere“.

„ 322 in der Note ist D für die mittlere Dichte statt V zu setzen.

„ 326 „ „ „ Zeile 2 von oben ist zu setzen:

$$ab = \frac{b}{h}(h - x);$$

Bayerische
Staatsbibliothek
München,

Berichtigung zur zweiten Abtheilung.

§. 162. fehlt die Bemerkung, daß der dasselbe beweisende Satz nur für Körper gilt, deren Masse auf beiden Seiten von der Bruch-
ungsebene des Schwerpunktes symmetrisch vertheilt ist.

Berichtigung zur dritten Abtheilung.

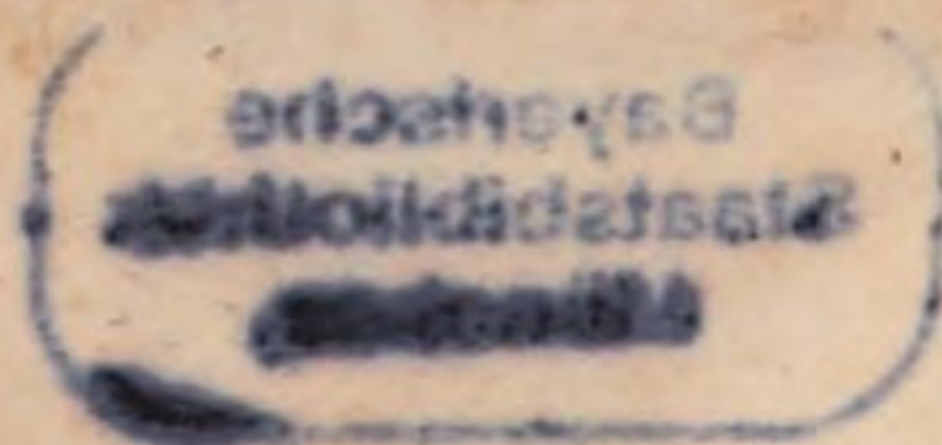
Seite 295 Zeile 17 v. unten ist „mitteln“ statt „mitteln das etc.“ zu
setzen.

319 „ 15 v. oben ist zu lesen: „wobei die Wände des letz-
teren etc.“ statt „wobei letztere“.

322 in der Note ist D für die mittlere Dichte statt V zu setzen.

326 „ „ Zeile 2 von oben ist zu setzen:

$$ab = \frac{b}{a} (a - x);$$



In der **Arnoldischen** Buchhandlung in *Dresden* und *Leipzig* ist erschienen und durch alle Buchhandlungen zu beziehen:

Johann Andreas Schubert,

Professor der mathematischen Wissenschaften an der technischen
Bildungs-Anstalt zu Dresden,

E l e m e n t e

der

M a s c h i n e n l e h r e.

Erste Abtheilung.

**Vom Materiale der Maschinentheile und deren
Construction oder von den Hölzern und Metallen,
vom Formen, von den Gufsmodellen und vom
Giefsen der Metalle, vom Verzinnen und Löthen
und von den Verbindungen, von den Formen und
der Construction der wichtigsten
Maschinentheile.**

Mit 22 grossen Steindrucktafeln, von 0 — XXI,
enthaltend:

Tafel 0. Gufsformen, Schmelzöfen und Façonirung der Metalle.

Maschinentheile und deren Verbindung.

- „ I. Flachgängige Schrauben.
- „ II. Scharfkantige Schrauben.
- „ III. Verbindung der Metalle durch Schrauben und Bolzen.
- „ IV. Verbindung der Räder mit Wellen.
- „ V. VI. Verbindung der Hölzer.

Maschinentheile und Construction derselben.

- „ VII. Kuppelung der Wellen.
- „ VIII. Ausrückezeuge.
- „ IX—XI. Stehende und hängende Lager.
- „ XII. Schwingende Lager und Lagerzapfen.
- „ XIII. Wellzapfen, Schnur- und Bandläufe.
- „ XIV. Hebescheiben und Kettenräder.
- „ XV. Hebedaumen und Räder.
- „ XVI. XVII. Verzahnung der Räder.
- „ XVIII. Wenderäder, Wurmräder und Geradföhrungen.
- „ XIX. Geradföhrungen und Ventile.
- „ XX. Ventile, Hähne und Schiebventile.
- „ XXI. Schiebventile und Kolben.

broch. Preis 7½ Thlr.

Johann Andreas Schubert,

Professor der mathematischen Wissenschaften an der technischen
Bildungs - Anstalt zu Dresden,

Elemente

der

Maschinenlehre.

Zweite Abtheilung.

Von der Bearbeitung fester Körper im Allgemeinen,
von den einfachen Werkzeugen und von
den Werkzeugmaschinen.

Mit 35 grossen Steindrucktafeln,
enthaltend:

Werkzeuge und Werkzeugmaschinen.

Tafel I. Werkzeuge zum Stützen und Schneiden.

- „ II. Bohrer und Hobel.
- „ III. Feilen, Sägen etc.
- „ IV. Längen - Theilmaschine.
- „ V. Kreis - Theilmaschine.
- „ VI. Hand - Hobelmaschine.
- „ VII—IX. Hobelmaschine.
- „ X. Nuth - Hobelmaschine.
- „ XI. Riffelmaschinen.
- „ XII—XVII. Bohrmaschinen.
- „ XVIII—XX. Cylinder - Bohrmaschinen.
- „ XXI. Verticale Cylinder - Bohrmaschine.
- „ XXII. Durchstösse.
- „ XXIII. Drehwerkzeuge etc.
- „ XXIV. Raderschneidmaschinen.
- „ XXV. Supports.
- „ XXVI. Drehbänke.
- „ XXVII. Drehbank.
- „ XXVIII. Drehbank mit Support.
- „ XXIX. Drehbank.
- „ XXX. Support - Drehbank und Ovalwerk.
- „ XXXI. Kluppen und Bohrer für Schrauben.
- „ XXXII. Maschinen zum Schraubenschneiden.
- „ XXXIII. Apparate zum Biegen der Bleche und Bohren der
Steine.
- „ XXXIV. Durchstösse und Röhrenzüge.
- „ XXXV. Steinbohrmaschine.

broch. Preis 10 Thlr.

Druck der Teubner'schen Officin in Dresden.

Rühlmann, Moritz,

Die technische Mechanik und Maschinenlehre zunächst als Leitfaden für den
Unterricht an gewerblichen Lehranstalten ...

Bd.: 1,3

Dresden ; Leipzig 1844

BHS III 43-1,3

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10708300-8